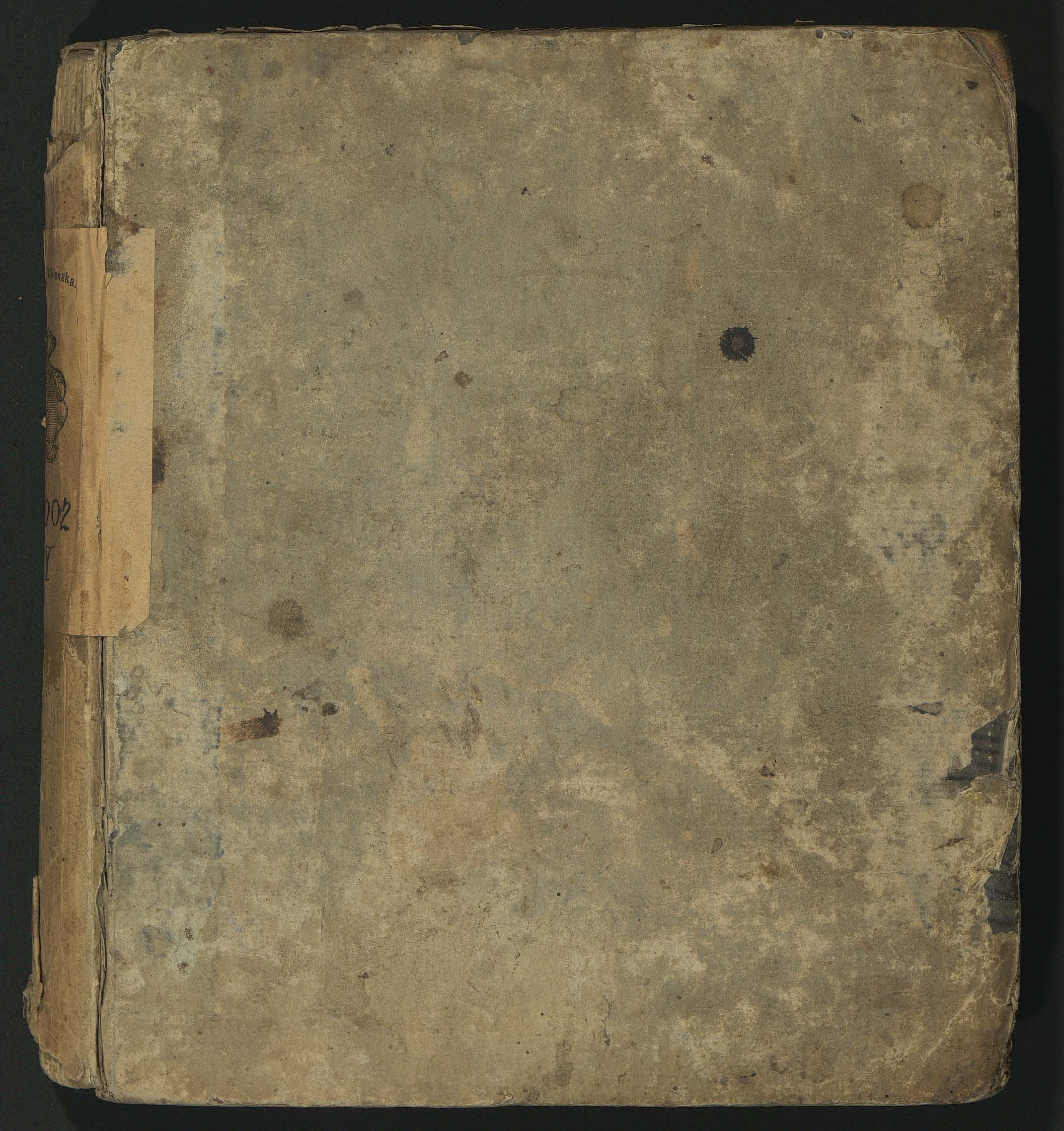




Algebra

Die Mathematik wird wie bekannt eingetheilt: in reine Mathematik und in angewandte Mathematik. Die erstere hat es nur mit Vergleichung und Bestimmung der Größe allein zu thun, ohne auf die übrigen Eigenschaften zu sehen. Der zweite Theil der Mathematik ist eine Anwendung der reinen Mathematik, und zieht außer der Größe auch noch die Eigenschaften und physischen Beschaffenheiten mit in Betrachtung. Die reine Mathematik theilt sich in Geometrie und Arithmetik. Letztere beschäftigt sich mit unstetigen (discreten) Größen nämlich solchen, die aus abgesonderten und durch eigene Grenzen bestimmten Theilen zusammen gesetzt sind; bei ihnen wird die Einheit zum Grunde gelegt und dann die Größe entstanden gedacht wird. Dies können nun natürliche und Zahlen seyn. Stetige (continuirliche) Größen sind Gegenstände der Geometrie; dies sind Größen deren Theile ununterbrochen aneinander hängen z. B. Linien, Flächen u. s. w.; jedes

Continuirliche Grössen als einen discrete betrachtet.

können auch sie wie discrete Größen behandelt werden, wenn ich z. B. eine Linie in eine gewisse Anzahl kleiner Theile. Eine discrete Größe kann nun aber nur aus gleichartigen Dingen bestehen. Man macht den Begriff von Größe, in so fern nämlich die Größe einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, auch auf Kräfte anwendbar, und nennt sie intensive Größen im Gegensatz der extensiven nämlich solchen die aus gleichartigen Theilen zusammengesetzt sind; jedoch genau genommen kann man hierunter auch die Kraft zählen, indem man sie aus Theilen bestehend denken kann, und beliebig verstärkt oder vermindert werden kann.

Größen überhaupt können nun von zweyerley Beschaffenheit seyn. 1) sie können ~~…~~ an sich gleichartig seyn, und 2) können sie von der Beschaffenheit seyn daß sie sich ganz oder zum Theil aufheben; und dies ist der Begriff durch den man entgegengesetzte Größen bezeichnet. Zur Bezeichnung und um sie von-

einander zu unterscheiden nennen wir sie
<u>bejahende</u> (positive) und <u>verneinende</u> (negative)
Größen. z. B. Gewinn u. Verlust; Steigen und
Fallen u. s. w. man sehe Pasquich I. §2. Willkühr-
lich aber übrigens ist es welcher Art Größe ich
die Bezeichnung + oder − gebe, und es ist sehr
irrig wenn man glaubt z. B. nothwendig müsste
Vermögen positiv und Schulden negativ genannt
werden u. s. w. denn ich kann es ebensogut
umgekehrt benennen, nur muß ich beobachten
bei <u>einer</u> Rechnung der einmal angenommenen
Bezeichnung treu zu bleiben.

Jede Größe nun betrachtet man in der
Rechnung ursprünglich als positiv angenommen
wenn nicht das Gegentheil grade zu verordnet
wird. Das mag wohl daher gekommen seyn
daß man nicht unnützer Weise immer Zeichen
schreiben wollte; daher schreibt man statt
+12 immer nur schlechthin 12.

<u>Addiren</u>.

<u>Gleichgesetzte Größen wie entgegengesetzte
Größen überhaupt behandeln heißt addiren.</u>

Eine Zahl kann also wie oben erwähnt, aus und =artigen Theilen bestehen: so entsteht also +5 aus +1+1+1+1+1; und −5 aus −1−1−1−1−1, indem wir nämlich die vorher zum Grunde gelegte Beschaffenheit in eine entgegengesetzte Beschaffenheit verwandelte. Soll nun 100 + 80 − 90 + 60 − 180 addirt werden, so wird man die Frag genau verfolgend so schreiben (100)+(+80)+(−90)+(+60)+(−180)

Operations und Beschaffenheitszeichen.

wo das Zeichen + und vor der Parenthesen steht nur das <u>Operations-Zeichen</u>, und die Zeichen in der Parenthesen die <u>Beschaffenheitszeichen</u> vorstellen. Da nun aber bei der Addition aus ihrem Begriffe hervorgeht, daß ich entgegengesetzte Größe wie entgegengesetzte Größen überhaupt behandeln soll, so werd ich hier nichts zu thun haben als die gleichartigen positiven Zahlen zusammen zu zählen, desgleichen mit den negativen zu machen und dann gegen einander aufzuheben. Ob das nun aber das Ganze auf einmal oder einzeln alle seine Theile trifft

ist gleich, und in diesem Falle kann ich also das Operationszeichen ganz weglassen und mit dem Beschaffenheitszeichen verwechseln.

Hier also $240 - 270 = -30$.

Subtrahiren.

Die Subtraction ist vollbracht wenn ich die Zeichen des Subtrahenden in die entgegengesetzten verwandle, und dann die Größen wie entgegengesetzte Größen überhaupt behandle. also wenn ich die Zahl 7 von 12 abziehen soll so verstehe ich folgendergestalt.

$+12$	$+12$	-12	-12
± 7	∓ 7	± 7	∓ 7
$+5$	$+19$	-19	-5

Genau entwickelt müßte die Subtraction so dargestellt werden:

$+12-(+7)$ $+12-(-7)$ $-12-(+7)$ $-12-(-7)$.

wenn ich nun aber wie das Beispiel zeigt eine Größe von einer andern wegnehmen soll, so muß sie doch nothwendig in ihr enthalten seyn ich muß nur daher die Sache so denken

$+12 = +12+7-7$

$+12 = +12-7+7$

$-12 = -12+7-7$

$-12 = -12-7+7$ zuletzt kann

Es wird bei der allg. Subtr. Verfahren darauf zu sehen, daß durch die Verwandlung der Zeichen des Subtrahenden, und die darauf erfolgende Addition, die Subtr. wirklich garantirt wird. [illegible] giebt die Erklärung der Subtr. wenn man sie als das Suchen des Uebergewichts der Minuend. über den Subtrah. ansieht. Es muß daher S in M ~~enthalten seyn~~ verschwunden gemacht werden, um das Uebergewicht x, was der Rest seyn wird hervorzubringen. dieses geschieht aber dadurch daß man S mit entgeg. Zeichen mit M verbindet. Kann da S in M enthalten seyn muß, weil M über S das Uebergewicht hat, so wird S in M verschwinden, wenn man das [illegible] von S in M hinzufügt oder ab damit verbindet

Ist $S < M$ und von derselben Natur oder nun ist es wirklich in M enthalten, so daß M in $S \pm X$ zerlegt werden kann.

Ist aber $S > M$ oder von entgegengesetzter Natur dann kann es in M nicht wirklich enthalten seyn sondern muß erst in M hinein gelegt werden ohne M zu verändern

m übergeht als denn in

$m \pm s \mp s$

wo nun s wie es auch beschaffen ist verschwinden gemacht werden kann, und es bleibt als Rest der Ueberschuss $m \pm s$

Auch dieselbe Art muss ein Minuendus gebildet werden, wenn der subtrah: Terminus fest, der von derselben Art wäre, ist $s = \pm a$ und soll Terminus entsprech. zerlegen minuendus so muss man als solchen $\pm a \mp a$ an und lässt dann $\pm a$ verschwinden, worauf der Rest $\mp a$ sich entwickelt.

ich in allen vier Combinationen (mehrere sind dann nicht) die +7 u. −7 hinwegnehmen und ich erhalte dann für den ersten 2t 3t u. 4t Fall, ebenfalls +5 +19 −19 −5;

Bei der Subtraction muss ich wie aus obigem zu ersehen ist, das Operationszeichen − mit dem Beschaffenheitszeichen ja nie verwechseln.

Multiplication.

Eine Grösse ist wie bekannt nur einer Vermehrung oder Verminderung fähig. Die Vermehrung aber kann auch eine doppelte Art geschehen; einmal kann ich sie um etwas ungleiches vermehren (addiren) um anders, mal kann ich sie um etwas gleiches, und zwar dadurch vermehren daß ich sie selbst zu sich addire. Dies giebt den Begriff von der Multiplikation. Diese Vermehrung macht nun zwar im Wesen nichts verschiedenes aus, wohl aber in der Form, denn Multiplikation ist weiter nichts als eine fortgesetzte Addition einer und derselben

Größen.

Jede benannte Zahl kann nur mit einer unbenannten Zahl und nicht wieder mit einer benannten Zahl multiplicirt werden z. B. 20 Meilen kann ich nur 3 mal nicht mit 3 Meilen mal nehmen..

= Daraus ergiebt sich, daß wenn mit benannten Zahlen multiplicirt wird, der multiplicator und der multiplicandus nicht zusammengehalten werden können. Wenn der multiplicandus eine benannte Zahl ist, so ist es auch das product mit einer gleichen Benennung, so daß die Benennung des multiplicandus gar nicht in Rücksicht genommen werden darf. —

Folgende Fälle können nun in der Multiplication vorkommen, wo Zahlen durch die ihnen vorgesetzten Zeichen natürlich zugleich ihre Beschaffenheit erhalten haben.

$+12$	$+12$	-12	-12	mit
$+5$	-5	$+5$	-5	

Um nun für alle diese Fälle ein richtiges Resultat besonders in Hinsicht auf ihre Zeichen zu erhalten müssen wir die Sache in folgender Gestalt betrachten. Wir nehmen hierbei an daß die obere Zahl 12 als der Multiplicator wenn er mit der absoluten Zahl +5 multiplicirt wird, sein einmal gehabtes Zeichen beibehalte, und schließen dann: daß wenn +5 einen gewissen Erfolg in Absicht auf den Multiplicator ausdrückt, so

besser leuchtet die Einsicht hervor aus einer bessern Definition der Multiplication

muß −5 nothwendig das Gegentheil hervorbringen
und wird also für diesen Fall +60 −60 −60
+60, und allgemein:

Daß gleiche Zeichen ein positives Product
ungleiche dagegen ein negatives Product
geben.

Division.

Hier kann ich benannte Zahlen in benannte
so wie in ~~unbenannte~~ absolute Größen divi-
diren. Ich kann z. B. fragen wie oft sind
3 x in 15 x enthalten und ich erhalte zur
Antwort eine absolute Zahl; hingegen kann
ich fragen wie viel ist der 3te Theil von 15 x
und ich erhalte zur Antwort eine benannte
Zahl. Wenn zu dividiren ist, so wie die

+12 : +3 = . Divisor 3 als eine absolute
+12 : −3 = Zahl annehmen, um eine
−12 : +3 = beschaffenheits Zahl zum
−12 : −3 = Quotienten zu erhalten,

so entsteht die Frage, ob wir bei der dividirten
des + Divisor den ~~Quotient und~~ dividendus
aber so theilen wie er da steht, oder vielleicht

Der Ausdruck ist falsch; denn die
Benennung des Divisors kann ge-
wiß im Ausdruck ich kann 12
Ellen nicht in 4 Ellen, sondern
in 4 = Theile zerlegen. Der
Quotient hat daher immer die Be-
nennung des Dividenden. Bei den
angeführten Beispielen ist die =
Benennung immer eine Nachlässigkeit
adhaerendo.

sein Gegentheil, nehmen wir nun an zuförderst an daß er so getheilt wird wie er da steht, so

$+12 : +3 = +4$ ist die Division richtig, und
$+12 : -3 = -4$ denselben Gründe wie bei
$-12 : +3 = -4$ der Multiplication, eben
$-12 : -3 = +4$ auch hier ist nothwendig die

-4 eine entgegengesetzte Wirkung von der $+4$ hervorbringen.

Da nun wir bekannt die Multiplication der Quotienten mit dem Divisor, den Dividendus wieder zum Vorschein bringen muß so wird man sich sehr leicht von der Richtigkeit der Zeichen überzeugen.

Ueber den Ausdruck $-a < 0$ Seite 16 [illegible]

Positive und negative Größen sind wie wir gesehen haben in Absicht auf Zeichen ganz willkührlich der Uebergang der Größen in einander geschieht aber immer durch 0, und in diesem Sinne können wir die eine Größe in Beziehung auf die andern weniger als 0 nennen. Dies kann nun aber wie aus beistehenden Beispielen zu ersehen ist positive und negative

+3	−3
−1	+1
+2	−2
−1	+1
+1	−1
−1	+1
0	0
−1	+1
−1	+1
−1	+1
−2;	+2

Größen besitzen, und also deutet es nur den
Uebergang der einen in die andere an.
Eine Größe also die kleiner als Nichts ist in
philosophischer Hinsicht gedacht, ist ein Unding
die negativen Zahlen hat man einmal als
solche angenommen, ~~und deshalb~~ daß sie desto
größer sind je weniger Einheiten sie haben
z.B. $-7 > -15$; $+7 < +15$, und deshalb
kann man auch schreiben $-b < +a$;
$a < a+b+c$. Der Ausdruck $-b < 0$ entsteht
übrigens folgendergestalt:

$$\begin{array}{r} a < a+b \\ -a-b = -a-b \\ \hline -b < 0 \end{array}$$

Dies ist aber nur eine Scheinform, und man
muß denken daß der Subtrahendus a als
man ihn a+b abgezogen würde erst durch a
Null werden müßte, und daß von a kein
Theil mehr da ist, mithin $-b$ mußte von a fort
also weniger als 0 ist.

Buchstaben, Rechenkunst.

Die Zahlen Rechenkunst ist diejenige Wissenschaft die uns lehrt wie Zahlen Größen nach gewissen Regeln verändert werden müssen.

Die Buchstabenrechenkunst ist dagegen diejenige Wissenschaft, die uns lehrt wie ~~die~~ Buchstaben größen regelmäßig verändert werden müssen.

Die Buchstabenrechnung behält ihre Elemente bei und deutet nur alle Formen der Rechnung an, da hingegen die Zahlenrechnung die Zahlen wirklich nach dem Zahlensystem verändert.

Zeichen der Addition +, $a+b$.

—— Subtraction −; $a-b$ d.h. $a-(+b)$

—— Multiplication × u. · ; $a\times b$, $a.b$, u.
ab; abcd nicht adcb;

Zeichen d. Division : $a:b$ oder $\frac{a}{b}$. Die Bruchform ist die vortheilhafteste weil einige Mathematiker auch das Zeichen : für das Verhältniß brauchen.

Die Buchstabengrößen sind nun entweder einfach als a; b; c; oder sie sind zusammen-

gesetzt als: $a+b+c+d$; solche Größen,
schließt man, sobald man eine Operation
mit ihnen vornehmen will in eine Parenthese
und setzt vor die Parenthese das Operations-
zeichen als $(a+b) - (a-b+c-d+f)$; und
$(a+b) \times (c+d) = (a+b).(c+d) = (a+b)(c+d)$;
nicht $= a+b(c+d)$, denn dies giebt einen
ganz andern Sinn.

Ueberhaupt ist es sehr nöthig daß man sich
mit den Formen d.h. die Art wie die
Größen ausgedrückt sind bekannt macht,
und hierin für sich die besten wählt. Zum
Schluss der Klammern u. Parenthesen würde
folgendes vorzuziehen seyn $[[(\ ).(\ )].[\ ]]$;
Unterscheiden muss man $\overset{3}{a}$ und a^3 denn
$\overset{3}{a}$ zeigt die Stelle im Zahlensystem an
z.B. $\overset{3}{5} = 5000$; $\overset{-3}{5} = \frac{1}{5000}$; $\overset{-4}{73} = 0,00073$
a^3 dagegen die Dignität $5^3 = 5.5.5 = 125$;
(§10). Ein Product also was aus mehreren gleichen
Factoren besteht ist eine Dignität oder Potenz.
Die Zahl welche anzeigt wie oft die Größe als

$\frac{1}{730000}$

als Factor angesetzt ist heißt der Exponent der

Dignität. a^2; a^3; a^4; ..... a^m; $(a+b)^m$;

Der Verfasser sagt ferner (im 14 Zusatz ibidem)

a^m kann man sich vorstellen daß die Einheit mit a mmal

multiplicirt wird sey; also $a^m = \overset{m\,mal}{aaa\ldots a} = 1.\overset{m\,mal}{aa\ldots a}$.

die Einheit steht also hier m mal in der Dignität.

a^{-m} zeigt an daß mit der Einheit das entgegen-

gesetzte geschehen ist, mithin kann also hier nur

von einer Division die Rede seyn also a^{-m} muß

$=$ seyn $\frac{1}{\underset{m\,mal}{aa\ldots a}}$;

Da +1 und −1 durch 0 durchgeht so muß $a^0 = \frac{a^1}{a^1}$ ‖

$= 1$ seyn.

per 17. Zusatz 26 negativ.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ denn $\overset{m\,mal}{aaaa\ldots a} \cdot \overset{n\,mal}{aaaa\ldots} = a^{m+n}$.

$\frac{a^8}{a^3} = \frac{aaaaaaaa}{aaa} = 1.aaaaa = a^5 = a^{8-3}$;

Bei dieser Gelegenheit können wir etwas üben, den

negativen Exponenten verschaffen, indem wir ihn

so entstanden Quotienten kennen. $\frac{a^5}{a^8} = \frac{aaaaa}{aaaaaaaa}$

$= a^{5-8} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Das giebt uns nun Mittel an die Hand ~~und~~ aus

einem Ausdruck negative Exponenten zu entfernen;

Operationen mit Potenzen

I $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

II $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

III $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$;

denn es ist $d^{p-q+r-s} = d^{p+r-q-s} = d^{(p+r)-(q+s)} =$

$d^{p+r} \times \frac{1}{d^{q+s}} = \frac{d^{p+r}}{d^{q+s}}$.

Uebrigens muß man ja nur bedenken daß 5^{-3} nur eine Schreibform ist, und daß nur ein Ausdruck 5^{3} dieße Rechnen und zuschreiben ist, demungeachtet sind die negativen Exponenten sehr bequem indem sie die Rechnung in manchen Fällen sehr erleichtern, nur muß aber man jederzeit dieser deren einen richtigen Sinn unterlegen und nur denken daß er dieses eine Division der Einheit durch die Dignität selbst entstanden ist. Der Ausdruck a^0 ist auch nur eine Schreibform wird aber wie wir in der Folge sehen werden bei den Logarithmen sehr merkwürdig indem wir dadurch jede Grundzahl und Exponent auf 1 zurückführen können:

IV $a^0 = 1$.

$a^0 = a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$.

Einige hierher gehörige Beispiele:

$\frac{a^2b^3}{cf^4} - \frac{1}{a^3b^2} = a^2b^3c^{-1}f^{-4} - a^{-3}b^{-2}$;

$a^2b^{-1}c^3b^{-4} - a^{-1}b^{-3} + cd^{-2} = \frac{a^2c^3}{b^5} - \frac{1}{ab^3} + \frac{c}{d^2}$

Was jetzt aber von positiven Exponenten gesagt ist gilt auch von negativen, das sagt Meyerhofer im Zusatz 8 ... Seite 28.

$$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}.$$

denn $a^n \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m}.$

$$a^n : a^{-m} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}; \text{ denn}$$

$$a^n : a^{-m} = a^n : \frac{1}{a^m} = \frac{a^n \cdot a^m}{1} = a^{m+n};$$

12t Zusatz. sagt dasselbe von Brüchen.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}^{m \text{ mal}} = \frac{aaa \text{ m mal}}{bbb \text{ m mal}} = \frac{a^m}{b^m}$$

das würde man auch als Hauptregel aufstellen; allein es würde die Regeln zu sehr anhäufen, und sie ist wie alle folgenden Sätze sich auf die vier angegebenen Hauptregeln zurückführen.

Aus obigen Beispielen des Bruchs ist es klar daß Potenzen echter Brüche immer kleiner werden je höhere Potenzen sie sind, so daß man von Brüchen die als ganz klein unbeachtet lassen kann.

Soll eine Potenz wieder zur Potenz erhoben werden so multiplicirt man die Exponenten.

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (a^3)^4 = aaa \cdot aaa \cdot aaa \cdot aaa$$

V. $(a^m)^n = a^{mn}$; $= a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot 4} = a^{12}$;

$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaa \cdot bbb = a^3 \cdot b^3$

Wenn ein Produkt potenzirt werden soll, so wird jeder einzelne Factor zur verlangten Potenz erhoben:

$(a^m b^n c^p \ldots z^r)^3 = (a^m b^n c^p \ldots z^r) \times (a^m b^n c^p \ldots z^r) \cdot (a^m b^n c^p \ldots z^r) = a^m a^m a^m \cdot b^n b^n b^n \cdot c^p c^p c^p \ldots z^r z^r z^r = a^{3m} \cdot b^{3n} \cdot c^{3p} \ldots z^{3r}$.

Es ist also $(a^3 b c^5)^4 = a^{12} b^4 c^{20}$;

die Schreibart $(a+b+c)^3$ ist nicht bei allen Mathematikern gleich sondern einige schreiben $\overline{a+b+c}^3$; die Multiplikation drücken sie statt 2 Parenthesen so aus $\overline{a+b+c} \times \overline{d+f}$.

die Division so: $\overline{a+b+c} \div \overline{d-f}$; Ältere englische Schriftsteller haben das Zeichen $\div$ auch bei der Subtraktion gebraucht.

§ 11. 1. Absatz.

Von den Wurzelgrößen

Die Wurzel einer Zahl A heißt eine Zahl a welche mehreremal mit sich selbst multiplicirt die Zahl A selbst, zum Vorschein bringt.

Wurzelexponent ist diejenige Zahl welche anzeigt wie vielmal die Zahl a genommen werden soll

um die Zahl A selbst hervorzubringen. So ist daher $\sqrt[n]{a}$ = n^{te} Wurzel aus a.

Wurzelausziehen heißt also eine gewisse Größe in so viel Faktoren zerfällen als der Wurzel-Exponent angiebt.

Auch hier pflegen d. Schreibarten $\sqrt{(a+b+c)}$ und $\sqrt{a+b+c}$ die letztere ist vorzuziehen.

überhaupt muß man sich hier besonders eine sehr deutliche Schreibart angewöhnen denn: $\frac{\sqrt{a}}{b}$ ist nicht $= \sqrt{\frac{a}{b}}$ und n. gleich $\sqrt[a]{b}$;

Gleichnamige Potenzen oder Wurzelgrößen beziehen sich nur auf ihren Exponenten [illegible] Größen. a^m u. a^n sind ungleichnamige, dagegen sind a^r u. b^r gleichnamige Potenzen. $\sqrt[m]{a}$ u. $\sqrt[n]{a}$ sind ungleichnamig dagegen $\sqrt[m]{a}$ u. $\sqrt[m]{b}$ sind gleichnamige Wurzelgrößen.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ hier muß man wiederum die Richtigkeit folgern, als man es [illegible] die Potenzirung und umgekehrt [illegible]. $\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{7}{9}$;

$\sqrt[n]{abc....p} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.....\sqrt[n]{p}$. weil

1) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$.

VI $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$

$\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[m]{a^m}=\sqrt[m]{a^{n+m}}$

man sich jeden Factor unter dem √ Zeichen,
so entstanden denken muss und einer rechten
Größe die in die n^{te} Potenz erhoben worden
ist. denn bei dem Ausdruck $\sqrt[3]{343}$ ist die Zahl
343 aus einer andern entstanden die in die 3te
Potenz erhoben worden ist, und zwar hier aus 7.
denn $(7)^3 = 343$.

Gleichnamige √ Größen werden multiplicirt
wenn man die Größen unter dem √ Zeichen mit
einander multiplicirt. dies ist für die Anwendung
ein sehr wichtiger Satz:

$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{64}=4$. und wie aus vor-
stehendem Beispiel zu ersehen ist kann man
irrationale Größen hierdurch rational machen
§ 15. kann kürzer als bisher behandelt werden
Es soll ~~aus~~ $\sqrt[3]{a^{12}}$ gezogen werden d. h. also die
Größe a^{12} soll in 3 gleiche Factoren zerstellt
werden. Es wird also seyn $a^n\cdot a^n\cdot a^n =$
a^{3n} wo $3n = 12$ und also $n = 4$ ist.
Umgekehrt geschlossen ist $a^4 a^4 a^4 = a^{4+4+4}$
$= a^{3\cdot 4} = a^{12}$. d. h. also ich würde in

der Exponenten der Potenz unter dem Zeichen durch den √ Exponent: also $\sqrt[5]{b^{30}} = b^{\frac{30}{5}} = b^6$; $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, aus letztern Beispiele ist es also denkbar daß eine Größe in eine Potenz erhoben sein kann und doch aus ihr die Wurzel gezogen werden soll. Hieraus können wir nun auch schließen daß wir ~~Anfangs~~ gebrochene Exponenten haben können, jedoch sind es nicht Rechnungsformen sondern nur Schreibformen. z.B. $8^{\frac{2}{3}}$. da 8 in die Potenz $\frac{2}{3}$ unmittelbar zu erheben ist nicht möglich. man bedient sich dieser Form der gebrochenen Exponenten bei Rechnungen aber sehr oft mit großem Vortheil. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

VII $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

Satz 36. Zus. 1. u. s. w.

Wurzelgrößen werden zu Dignitäten erhoben wenn man die Größe unter dem √ Zeichen zur Potenz erhebt: $(\sqrt[3]{5^2})^2 = \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}}$.

denn $(\sqrt[3]{5^2})^2 = (5^{\frac{2}{3}})^2 = 5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$.

$(\sqrt[n]{a^m})^r = (a^{\frac{m}{n}})^r = a^{\frac{mr}{n}} = \sqrt[n]{a^{mr}}$.

VIII $(\sqrt[n]{a^m})^r = \sqrt[n]{a^{mr}}$

Beim negativen gebrochenen Exponenten gilt

desshalb: es ist $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$

Für diesen Ausdruck giebt es nun 3 Schreibarten

1) $a^{\frac{-m}{n}}$; 2) $a^{-\frac{m}{n}}$, 3) $a^{\frac{m}{-n}}$; welche wie leicht aus der Division hinsichtl. der veränderten − Zeichen, als negativen Exponenten, einander gleich sind wovon aber die beiden ersten nur zu brauchen, die letztern aber ~~ihrer~~ weil sie unstatthaft zu nennen ist; denn bei ihr bezieht sich das − auf den ~~Zähler~~ Nenner welches doch der Wurzelexponent hier ist, u. dieser muß doch nothwendig eine absolute Zahl seyn:

$\frac{a^2b^3}{\sqrt[4]{c^3}} = a^2b^3c^{-\frac{3}{4}}$.

ferner ist $a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{-m}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{1}$

$= a^{\frac{m}{n}}$; desshalb ist aber auch

$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{-m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}}$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{1}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{1} = a^{\frac{m}{n}}$;

Auf diese Art kann man nun leicht jeden algebraischen Ausdruck leicht in Brüche ver-,

$\frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{1^{-\frac{1}{n}}}} = 1^{-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1^{-1}}$

$= \sqrt[n]{\frac{1}{1}} = \sqrt[n]{1}$

und $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

wandeln wo man einen beliebigen Zähler oder Nenner sich wählen kann. z. B. $a^2 b^{\frac{3}{4}} c^3 =$

$$= \frac{a^2}{b^{-\frac{3}{4}} c^{-3}};$$

ad. Zusatz 4.

$$\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^5 = \left(\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^5 = \frac{1^5}{a^{\frac{10}{3}}} = \frac{1}{a^{\frac{10}{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^{10}}} = \sqrt[3]{a^{-10}} = a^{\frac{-10}{3}};$$

Zusatz 6.

Soll eine Wurzelgröße zu einer Dignität erhoben werden, so dividirt ich mit dem Exponent der Dignität in den √ Exponent, und behalte den Quotient als √ Exponent bei.

$$\left(\sqrt[6]{a^5 b^2}\right)^3 = \left(a^5 b^2\right)^{\frac{3}{6}} = \left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}} = \left(\left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3} = \left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^5 b^2};$$

Wenn daher aus einer Größe eine √ auszuziehen soll deren Wurzel Exp. sich in Faktoren zerfällen läßt, so kann man dafür eine wiederholte √ Ausziehung so einsetzen, daß jeder der √ Exponenten ein Faktor des gegebenen √ Exp. ist: z. B. $\sqrt[24]{b} = \sqrt[2.2.2.3]{b} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{b}}}}$.

Zusatz 9. 38te Seite.

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}}$$ denn es ist

$$\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^r = a^{-\frac{mr}{n}}$$

$$\left(\sqrt[a]{m}\right)^b = \left(m^{\frac{1}{a}}\right)^b = m^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{m^b}$$

also $\left(\sqrt[a]{m}\right)^b = \sqrt[a]{(m^b)} = m^{\frac{b}{a}}$

$$\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^8 = \left(\sqrt{a^3 b^2}\right)^2 = \sqrt{a^6 \cdot b^4} = a^3 \cdot b^2$$

IX

$$\sqrt[b]{\left(\sqrt[a]{m}\right)} = \sqrt[ab]{m}$$

$$\sqrt[b]{\left(\sqrt[a]{m}\right)} = \sqrt[b]{m^{\frac{1}{a}}} = \sqrt{m^{\frac{1}{ab}}} = \sqrt[ab]{m}$$ (mal)

$$\sqrt[r]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^n} = a^{\frac{m}{r}} \cdot a^{\frac{n}{s}} = a^{\frac{m}{r}+\frac{n}{s}} =$$

$$a^{\frac{ms+nr}{rs}} = \sqrt[rs]{a^{ms+nr}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$$ denn

$$a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[nr]{(a^m)^r} = (a^m)^{\frac{r}{nr}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Cf. pag. 93.

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms+rn}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{ms+rn}}.$$

Wollte man aber vielleicht hier die Frage aufwerfen ob sich die Dignität nicht verändert habe wenn man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so betrachte man folgendes:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ mit r multiplicirt $= a^{\frac{mr}{nr}}$

$$= a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{r}} = a^{\frac{m}{n}\cdot r\cdot\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r} = a^{\frac{m}{n}};$$

Für die Division

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}-\left(-\frac{r}{s}\right)} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}}$$

denn es ist $a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}} : \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$

$$= \frac{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}}}{1} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}.$$

$$= \sqrt[ns]{a^{ms+nr}}$$; ——.

§16.

Begriff von Coefficient $8a$; $7b$.

§17.

Einfache Größen abc^2; zusammengesetzte durch + oder − getrennt als $abc + d - f$.

§18.

Gleichartig sind Größen wenn sie einerlei Buchstaben und einerlei Buchst. Exponenten haben als $3a^2b$ u. $5a^2b$; $8a^3b^{-\frac{1}{2}}$ u. $4a^3b^{-\frac{1}{2}}$;
ungleichartig sind sie wenn gemeinsam nicht gleich ist als, a^2b u. a^2b^{-3}; —

§19.

Addition.

Nur gleichartige Größen können wirklich addirt werden die übrigen ungleichartigen Größen kann man nur wie sie ausgedrückt sind, neben einander schreiben. z.B.

$-ac^2-ac^2-ac^2-ac^2 = -4ac^2$

oder $ac^2b+ac^2b+ac^2b = 3ac^2b$.

die Koeffizienten muß man sich dabei so entstanden denken, daß soviele Größen als der Koeffizient Einheiten hat, zu einander addirt worden sind.

$8a^2b+ad^2-a^2c^2-4a^2b-7ad^2+7a^2c^2+md^2f-nd^2f$.
$=4a^2b-6ad^2-6a^2c^2+(m-n)d^2f$;

der letzte Ausdruck $(m-n)d^2f$ ist eigentlich vom Verfasser hier unzeitig angebracht, denn das ist schon ein Vorfallen in Factoren und das gehört eigentlich zur Division.

Subtraction.

Ich schreibe die Größen untereinander und kehre die Zeichen des Subtrahendus um, sodann addiere die gleichartigen Größen, und die Subtraction ist geschehen:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
6a^2c & -5ad^3 & -6xy & +y^3 & -z^4 & \\
\pm 4a^2c & \mp 5ad^3 & \mp 8xy & \mp 3y^3 & \pm 2z^4 & \mp 8v. \\
\hline
2a^2c & * & +2xy & +4y^3 & -3z^4 & +8v.
\end{array}
$$

Das Sternchen ist ein Zeichen der Aufmerksamkeit, und zeigt an daß eine Größe hier weggefallen ist.

Das Untereinandersetzen der Größen beim Subtrahiren, wie man das der Rechnung mit Zahlen entlehnet hat, ist nicht immer anwendbar, daher ist es zweckmäßiger wenn man die Größen des Subtrahendus und Minuendus in einer Reihe schreibt, und sie durch Parenthese trennt, und setzt vor die Parenthese des Subtrahendus das Subtractionszeichen —, welches anzeigt was mit der Parenthese gemacht werden soll. also:

$(6a^2c - 5a^3d - 6xy + y^3 - z^4) - (4a^2c\ 5a^3d - 8xy - 3y^3 + 2z^4$

wo das Zeichen — vor der Parenthese hier

nicht Beschaffenheits sondern Operations Zeichen ist; will ich nun dies und die Parenthese hinwegschaffen so muss ich wirklich die Subtraction vollziehn, d.h. ich muss die Zeichen sämtlich umkehren, und da die Stelle bei den Buchstaben nichts ändert an den Zeichen so mögen sie stehen wo sie wollen. Zuweilen kann nun auch oft ein entgegengesetzter Fall eintreten, daß man nämlich Größen mit umgekehrten Zeichen zu haben wünscht weil man sie gerade braucht. In diesem Falle darf man nur diese Größen in eine Parenthese schließen, vor sie das Zeichen Minus setzen u. alle Zeichen der Größen in der Parenthese in die entgegengesetzten verwandeln, und bleibt unzuändernde Grösse. z.B.

$$a^2 - b + 3ac - ad + 15ad^3 = a^2 - b - (-3ac + ad - 15ad^3)$$

Multiplication.

Hier können 3 Fälle vorkommen. Es können multiplicirt werden: 1) einfache Größen mit einfachen. 2) einfache mit zusammengesetzten, u. 3) zusammengesetzte mit zusammengesetzten Größen.

Man bringe erst die Zeichen in Richtigkeit, multipliciren dann die Coefficienten und schreibe dann die Buchstaben beider Größen nach dem Alphabet geordnet neben einander, von gleichen Buchstaben addirt man ihre Exponenten;

$4ab \times 5cd = 20abcd$;

$7a^2b^3 \times 9a^4bc^2 = 7.9.a^2a^4b^3bc^2 = 63a^6b^4c^2$;

die Multiplication einfacher Größen mit zusammengesetzten deutet man gewöhnlich so an:

$4ab^3(3b^2c - 8a^4bd + 2abc)$

Hierbei ist aber die Multiplication bloß angedeutet d. h. ich soll die ganze Parenthese mit $4ab^3$ multipliciren. Soll nun aber die Multiplication ausgeführt werden, so muß ich die Größe vor der Parenthese mit jeder einzelnen Größe in der Parenthese wie oben multipliciren. Das geschieht wie unten. Die Zahlen setzt man den Multiplicanden rechts, die Buchstaben aber in der Regel links weil wir gewohnt sind von der Rechten zur Linken zu schreiben. z. B. : –

$$5ab^2c - 8a^4bd + 2bc.$$
$$4ab^3$$
$$20ab^5c - 32a^5b^4d + 8ab^4c.$$

Wollte man nun fragen: warum ich den Multiplicator mit allen Theilen des Multiplicandi multipliciren? Zum Beweise und Antwort folgendes. Wenn ich 12 x 5 nehmen soll, so muß ich jede Einheit die in der 12 steckt 5 mal nehmen die Zahl 12 kann ich nun aber auch ausdrücken durch 19 – 10 + 3, ich werde also hier alles mit 5 multipliciren und dann algebraisch addiren. Nehme ich nun die 19. 5 mal so habe ich 7 Einheiten zu viel genommen, nehme ich davon 10. 5 Einheiten ab so habe ich 3. 5 Einheiten zu viel weggenommen diese thue ich nun noch 3. 5 zu. also 19. 5 = 95 – 5. 10 = 45 + 3. 5 = 60. = 5. 12.

<u>Zusammengesetzte mit Zusammengesetzten Grössen</u>

Hier findet man 3 fache Ausdrucks Art der Multiplication statt. Wenn zum Exempel
1) $(3a^2b + 2a^3c - 4bc^2)(3ab - 2a^3c - 6bc^2 - ac^4)$; multiplicirt werden soll so kann man es

~~[illegible]~~ direkt zu ausdrücken: also

$$(3a^2b+2a^3c+4bc^2)(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)$$

setzt man nun $(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)=m$ = dem Multiplicandus, so ist es = $3a^2bm+2a^3cm+4bc^2m$; setzt man nun statt m den Werth so steht. $3a^2b(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)+2a^3c(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)+4bc^2(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)$.

Setzt man aber nun den Multiplikator $=n$ ~~so entsteht die [illegible], also~~

$$(3a^2b+2a^3c+4bc^2)=n.$$

$3a^2bn-2a^3cn+6bc^2n-ac^4n$; für n den Werth so steht. $3a^2b(3a^2b+2a^3c+4bc^2)-2a^3c(3a^2b+2a^3c+4bc^2)+6bc^2(3a^2b+2a^3c+4bc^2)-ac^4(3a^2b+2a^3c+4bc^2)$

Wenn aber die Multiplication wirklich vollzogen werden soll, so geschieht dies daß man unmittelbar jeden einzelnen Theil des Multiplicators mit den einzelnen Theilen des Multiplicandus durchmultipliciert, wie dies man bei der 2ten Operation bei den Formen schon vorgeschrieben; das ist aber weiter nichts.

werden als das nach gesetzte. Zu diesem Zweck stellt man sie untereinander wie folgt:

$$3a^2b - 2a^3c + 6bc^2 - ac^4$$
$$2a^2b + 2a^3c - 4bc^2$$
$$6a^4b^2 - 4a^5bc + 12a^2b^2c^2 - 2a^3bc^4$$
$$6a^5bc - 4a^6c^2 + 12a^3bc^3 - 2a^4c^5$$
$$-12a^2b^2c^2 + 8a^3bc^3 - 24b^2c^4 + 4abc^6.$$

Nun ist die Multiplication im strengsten Sinne geschehen. Wären es Zahlen, so müßte man nun alle Produkte hier addiren, das läßt sich nun auch mit Buchstaben thun wenn nämlich gleichartige darunter sind um sie abzukürzen. Um nun diese gleichartigen Partialprodukte zu suchen wenn sie vorhanden sind, versetze man wie unten, und denke sich das Produkt in lauter Parallelogramme getheilt. (Deshalb muß man auch die Produkte so untereinander schreiben, wie hier, da nicht aber wie man es erst gelegt gleich gleichartige Produkte zu suchen, weil das Vorräumen haben kann). In diesen Parallelogrammen werden nun immer die gleichartigen Produkte, an den gleichliegenden Vertikalen und Horizontalen seyn werden.

zuderivande Lage haben wir:

$$a - b + c + d - e$$
$$a + b - c - d$$

a^2	$-ab$	$+ac$	$+ad$	$-ae$
ab	$-b^2$	$+bc$	$+bd$	$-be$
$-ac$	$+bc$	$-c^2$	$-cd$	$+ce$
$-ad$	$+bd$	$-cd$	$-d^2$	$+de$

$$= a^2 - b^2 + 2bc - c^2 + 2bd - 2cd - d^2 - ae - be + ce +$$

die in den Winkelspitzen der ▭ stehenden Größen sind natürlich immer allein, und haben keine gleichartigen Größen mehr.

Hier habe ich nun jeden einzelnen Theil des Multiplicandus mit jedem einzelnen Theil des Multiplicators combinirt, aber ich kann dies auch umgekehrt sagen.

Wenn wir nun bei einem Produkt die Gleichartigkeit einzelner Theile voraussetzen so können wir sagen das Produkt besteht aus solchen Gliedern, welche Combinationen jedes einzelnen Gliedes des Multiplicators mit jedem einzelnen Theile des Multiplicandus und auch mit sich selbst enthalten.

Statt dessen entstehenden gleichartigen Größen kann man nun auch zusammengesetzte nehmen.

3f. $\frac{6a^4}{b} - \frac{2c^2}{ab} + \frac{b}{4c^3} - 2d^4$

$\frac{2a^2}{b^2} + \frac{4c}{a}$

$\frac{12a^6}{b^3} - \frac{4ac^2}{b^3} + \frac{2a^2}{4bc^3} - \frac{4a^2d^4}{b^2}$

$\frac{24a^3c}{b} - \frac{8c^3}{a^2b} + \frac{b}{ac^2} - \frac{8cd^4}{a}$

Hier ist nun die Multiplication geschehen, weil nichts aufzuheben ist, gesetzt aber man hätte im Product Größen wie $\frac{3ac^2}{4b} - \frac{2ac^2}{5b}$ so kann man sie trotz ihrer Verschiedenheit der Coefficienten zu vereinigen und in $\frac{7ac^2}{20b}$ zu verwandeln.

§ 22. Division

Auch sie kann 3facher Art seyn.
1) Einfache Größen durch Einfache
2) Zusammengesetzte durch Einfache
3) Zusammengesetzte durch Zusammengesetzte.

Die beste und gewöhnlichste Schreibform der Division ist Dividendus durch Divisor durch einen liegenden Strich zu trennen wie $\frac{8ac}{5bd}$ jedoch pflegt man auch so zu schreiben $(8ac):(5bd)$.

Hat man nun 2 einfache Größen zu dividiren so prüft er sich ob sie sich abkürzen lassen

wie z. B. $\frac{15ab^2d}{5bd} = 3ab$;

(Aufmerksam sagen auch Bruchzeichen $\frac{c}{c}$; $\frac{d}{d} = 1$ heben sich auf, $a - a = 0$ heben sich auch, solche kann man nur gegen wegstreichen).

Zusammengesetzte Größen durch Einfache.

$$\frac{18b^3c - 54bcd + 48b^3d^2 - 6bc^2 + 5ac + 6b^2c}{6b^2c}$$

$$= 3b - \frac{9d}{b} + \frac{8bd^2}{c} - \frac{c}{b} + \frac{5a}{6b^2} + 1;$$

Zusammengesetzte durch Zusammengesetzte.

$a + b + c - d - e$

$2de + ef - d^2 - b^2 - e^2 + cf + a^2 - df + 2ac + bf - 3be + af + c^2 + \ldots$

Es ist hier anzumerken den Divisor wie hier über den Dividend zu schreiben. Die Operation ist ganz wie bei Zahlen. Ich dividire mit einem Theil des Divis. in einem Theil des Dividendus, multiplicire den Quot. mit dem ganzen Divis., subtrahire das Product u. s. w. Auch hier ist es besser bei Multiplication des Quot. & Divis. sich nicht vorwärtsgehende Größen zu suchen, sondern gerade durch zu schreiben. Wenn man nun eine solche algebraische Division vollzogen hat

soll, so muß man hier auf 2 Hauptstelle besonders aufmerksam seyn. Wenn nämlich ein Dividend und ein Divisor gegeben ist, so muß man aufmerksam seyn ob im Dividend Produkte sind welche Combinationen des Divisors vorstellen. Ist dies der Fall, so muß ich den Dividend ordnen, und ich muß hier nach dem Princip der Combination verfahren, und muß sie in folgender Ordnung herausschreiben; hiebei muß ich aber nur auf die Buchstaben selbst und nicht auf die Coefficienten sehen. Der erste Theil des Dividends u. Divisors kann nur mit sich allein verbunden seyn. der 2te Theil mit dem ersten u. sich s. der 3te Theil mit dem 1te 2te u 3te Theil u.s.w. Dies gibt folgende Ordnung. Auf diese Art geordnet wäre obige Dividend folgender:

Bloß [lauter] nach Buchstaben und Permutationen zu ordnen.

1—1; $a+b+c-d+e \;\|\; = a-b+c+d-e+f$

2—1 $a^2-b^2+2ac+c^2+2bd-d^2-3be+2de-e^2+af+bf+cf-df+ef.$

$\pm af \pm bf \pm cf \mp df \pm ef$

2—2, 3—1 $\pm a^2 \pm ab \pm ac \mp ad \pm ae$

3—2 $+b^2-ab+ac+c^2+ad+2bd-d^2-ae$

3—3 $\mp ab \pm b^2 \mp bc \pm bd \mp be.$

4—1, 4—2 $+ac+bc+c^2+ad+bd-d^2-ae-2be$

4—3, 4—4 $\pm ac \pm bc \pm c^2 \mp cd \pm ce$

5—1 $+ad+bd+cd-d^2-ae-2be-ce$

5—2 $\pm ad \pm bd \pm cd \mp d^2 \pm de$

5—3, 5—4 $-ae-2be-ce+de-e^2$

5—5 $\mp ae \mp be \mp ce \pm de \mp e^2$

$-be$

Im umstehenden Beyspiele sollte nun die Anordnung nach $-be$ erst stellen durch a getheilt werden, da es aber sehr leicht und die Combinationen e f zu sehen war, das alles darin aufgieng, so geschah es mit af zuerst. der vollständige Quotient ist daher nun $a-b+c+d-e+f+\frac{-be}{a+b+c-d+e}$;

$$=a-b+c+d-e+f-\frac{be}{a+b+c-d+e};$$

Sollte nun zu dividiren seyn:

$$\frac{2a^3c+2a^2b-4bc^2}{20a^3bc^3+2a^5bc-2a^4c^5-24b^2c^4+4abc^6+6a^4b^2-4a^6c^2-2a^3b\ldots}$$

so würde hier der 2te Hauptfall der Ordnung eintreten, und man würde hier nicht nach obigen Regeln verfahren. Hier in solchen Fällen muß man die Glieder des Divisors genau betrachten und zusehen ob nicht ein Buchstabe charakteristische Unterschiede hat. Hat man nun einen solchen Buchstaben gefunden der dem Divisor und Dividend gemeinschaftlich ist, so ordnet man ihn nun nach seinen steigenden oder fallenden Potenzen, und eben so ordnet man diesen Buchstaben auch im Dividendus, steigend oder

stellend. In diesem Falle kann man nicht a und c sehen, und beliebig rangiren; und richtet sich hiernach auch nun die Rangirung des Divid.

$$2a^2b + 2a^3c - 4bc^2 \,\|\, = 3a^2b - 2a^3c + 6bc^2 - ac^4$$

$$6a^4b^2 + 2a^5bc - 4a^6c^2 + 10a^3bc^3 - 24b^2c^4 - 2a^3bc^4 - 2a^4c^5 + 4abc^6$$

$$\mp 6a^4b^2 \mp 6a^5bc \pm 12a^2b^2c^2$$

$$-4a^5bc - 4a^6c^2 + 12a^2b^2c^2$$

$$\mp 4a^5bc \mp 4a^6c^2 \pm 8a^3bc^2$$

$$+12a^2b^2c^2 + 12a^3bc^3$$

$$\pm 12a^2b^2c^2 \pm 12a^3bc^3 \mp 24b^2c^4$$

$$\pm 2a^3bc^4 \mp 2a^4c^5 \pm 4abc^6$$

$$0$$

Hier kann man nun fragen: ist es denn nothwendig daß ich den Divisor und Dividendus ordne? Allerdings sollte ich bemerken daß die division aufgehen soll, denn dieselben Quotienten erhalte ich sonst auch eine ganz andere u. weitläufige Art ohne ~~ist die Zahl~~ seinen Werth zu ändern. z. B. die Zahl 4 kann mannigfach ausgedrückt werden.

Wichtigkeit der Ordnung bei der Division.

Zum Beweise:

$$\frac{a+b}{b^2+a^2} = -\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} - \frac{b^4}{a^3} + \frac{\frac{b^5}{a^3} + a^2}{a+b} \;=\text{ der Quotient}$$

$$-b^2 - \frac{b^3}{a}$$

$$+\frac{b^3}{a} + a^2$$

$$+\frac{b^3}{a} + \frac{b^4}{a^2}$$

$$-\frac{b^4}{a^2} + a^2$$

$$-\frac{b^4}{a^2} \pm \frac{b^5}{a^3}$$

$$+\frac{b^5}{a^3} + a^2 \text{ zum Rest.}$$

Der Beweis der Division liegt darin daß der Quot × Divisor = Dividendus. Ist der Divid: nicht = dem Producte so kann man sich, doch nicht, dagegen angewöhnen.

Gewendet würde der Quotient folgender seyn:

$$\begin{array}{l} b+a \\ \hline -b^2+a^2 \,) = -b+a = \text{der Quotient.} \\ -b^2 \mp ab \\ \hline +ab+a^2 \\ \pm ab \pm a^2 \\ \hline \end{array}$$

Wenn nun beide Quotienten sich gleich sind so schließen wir umgekehrt daß die Division richtig gemacht worden ist.

Diese Probe kann man bei jeder sehr leicht machen wenn man bei jeder Art der Division den Quotient mit dem Divisor multiplicirt, wodurch man den Dividendus erhalten muß.

$(a+b).(-b+a) = a^2-b^2.$

Die vorhin herausgekommene Reihe mit $(a+b)$ multiplicirt giebt:

$$-\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}-\frac{b^4}{a^3}+\frac{b^5}{a^4}-\frac{\frac{b^6}{a^4}+a^2}{a+b}$$

$$a+b$$

$$-b^2+\frac{b^3}{a}-\frac{b^4}{a^2}+\frac{b^5}{a^3}$$

$$-\frac{b^3}{a}+\frac{b^4}{a^2}-\frac{b^5}{a^3}+\frac{b^6}{a^4}-\frac{b^6}{a^4}+a^2$$

$$-b^2+a^2.$$

Anmerkung v. H.

Jede Division ist eigentlich weiter nichts als eine Zerlegung in Factoren, und zwar wird wenn der Dividendus und Divisor gegeben sind allemal der Dividendus als die Größe betrachtet die in Factoren zerlegt werden soll, und der Divisor als einer der gegebenen Factoren, der Quotient dagegen als der zu suchende Factor.

Nun kommt aber auch der Fall vor daß Größen in Factoren zerlegt werden sollen ohne daß ein Factor gegeben ist. Es solle z. B. die Zahl 98 zerlegt werden. so ist es 2.49 = 2.7.7.

Wenn nun nur aber eine Zahl gegeben ist u. doch nicht erkannt daß sie z. B. durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 u. s. w. theilbar heißen, so muß man sie durch alle Primzahlen als 7. 9. 11. 13. 17. 19 u. s. w. dividiren z. B. die Zahl 323. Und solche Arbeiten hat man nun die sogenannte Factoren Tafeln diese gehen bis 2,000,000, sie sind aber natürlich sehr voluminoes. Eben so wie es bei Zahlen vorkommt kann es auch bei Buchstaben gefordert werden.

Wenn nun in einem Ausdruck ein Buchstabe überall vorkommt wie bei $a^3x - 6bx - 3acx$ so kann man ihn herausnehmen und die Größen in einer ...

Ausschließen durch den Formalsatz

Parenthese denken schreiben wir $x(a^2 - 6b - 3ac)$
Es ereignet sich in der Rechnung, daß man die Factoren ~~umgekehrt~~ umgekehrt haben will, in diesem Falle muß man nur der Größe vor der Parenthese ein umgekehrtes Zeichen geben, dann aber auch alle Zeichen in der Parenthese verändern. Nur muß man sich genau merken daß wenn man von einer Größe herausschafft man den Ausdruck selbst durch dieselbe dividirt.

Eben so wie man in Zahlen mehrere Factoren suchen kann, so kann man auch in mehreren Größen einen solchen Ausdruck in Buchstaben zerfällen. z.B. $4a^2bc - \frac{16}{7}a^3b^2c - 24a^2bc^2 + \frac{8}{5}a$
$= 4a^2bc\left(1 - \frac{4}{7}ab - 6c + \frac{2}{5}a^2\right) =$
$-4a^2bc\left(\frac{4}{7}ab + 6c - 1 - \frac{2}{5}a^2\right)$

In der Anwendung kommen nun auch mehrere Fälle vor, und hier muß man auf einen Kunstgriff aufmerksam seyn, daß man nicht in Fällen der Anwendung die ganze Größe selbst betrachtet, sondern immer 2 oder 3 Glieder zusammen nimmt, um sie zu betrachten: z.B.

$6a^2 + 15bc^2 - 10ac - 9abc - 25acd + 15a^2d$

$(6a^2 - 10ac) = 2a(3a - 5c)$

$(-9abc + 15bc^2) = -3bc(3a - 5c)$

$(15a^2d - 25acd) = 5ad(3a - 5c)$

Es soll also hier $2a - 3bc + 5ad$ mit $(3a - 5c)$ multipliciert werden, welches also die Fortsetzung war.

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline 2(a^2-2ab+b^2) \end{array}$$

Beispiele

$3a^2 + ac - bc - 5ab + 2b^2 =$

$\underbrace{2a^2 - 4ab + 2b^2}_{\alpha} + \underbrace{a^2 - ab}_{\beta} + \underbrace{ac - bc}_{\gamma} =$

$2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2(a-b).(a-b)$ ——— α.

$a^2 - ab = a(a-b)$. ——— β.

$ac - bc = c(a-b)$. ——— γ.

β und $\gamma = (a+c)(a-b)$ ——— δ.

$\alpha + \delta = (a-b)(a+c) + 2(a-b).(a-b) =$

$= (a+c+2a-2b).(a-b) =$

$= (3a - 2b + c).(a-b)$ als kürzester Ausdruck.

Von den Functionen.

Seite 50. Der Verfasser bringt hier sehr ungünstig die Lehre von den Functionen hierher, da sie in der Regel doch erst später zu kommen pflegt. Allein dies ist zu einer gewissen leichtern Art der Demonstration des binomischen Lehrsatzes, gewissermaßen nothwendig.

In der Algebra giebt es nun, wie bekannt, bekannte und unbekannte Größen, und solche sogenannte unbekannte Größen haben in einer Gleichung einen bestimmten Werth. In den quadratischen Gleichungen haben sie 2 Werthe auch die Werthe in höheren Gleichungen, in der Folge.

Hier muß man aber den Begriff fester stellen und man muß glauben daß sie auch mehrere Werthe annehmen kann. Der Gegenstand der Lehre von den Functionen betrachtet nun solche veränderliche Größen, und hier muß man nicht bloß unbekannte sondern auch zugleich den Begriff veränderlicher Größen voraussetzen.

Man konnte aber so gut bekannte Größen

[ver]änderlich verstehe, allein alsdann muß man diese
ändern können wie man will.

Solche veränderliche Größen nun, heißen
Functional Größen, und man wählt zu ihrer
Bezeichnung in der Regel die letzten Buchstaben — Veränderliche Größen
des Alphabets als x. y. z. Der Ausdruck also
$3ax - 2dx^3 - 5cx^5$, kann also eine Function
von x genannt werden, wenn nämlich x hier
eine veränderliche Größe ist. Eben so ist
$4cy^2 - caby^3 + 53ky^4$ eine Function von y;
Alles das womit eine Unbekannte solche Größe
multiplicirt wird heißt ihr Coefficient. z.B.
von $\frac{4a^2bx}{c}$ ist $\frac{4a^2b}{c}$ der Coefficient von x.

Man pflegt die Functionen gern nach den
Potenzen der veränderlichen Größe, hinsichts
der Folge ihrer Glieder zu schreiben, und zwar
steigend oder fallend, das erstere aber am besten.
Eine so geschriebene Function heißt dann
geordnet, und sie enthält so viel Glieder als — Ordnung der Functionen
Potenzen der Functional Größe vorkommen.
Fehlt nun in einer solchen Function eine Potenz
aus so muß man ein * machen um alle Zwang

zu verwenden, wie in unten stehenden Beyspiel bey x^3. Ebenso ereignet es sich daß Functionen nicht geschlossen sind, sondern ohne Ende fortlaufen, und deßhalb muß man zwar den Coefficient davon den Potenzen nach ordnen. z.B.

$$ax + bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - 5fx + dx^3 + hx^5$$

würde geordnet folgende Form haben:

$$(a + b - 5f)x + x^2(c) * + ex^4 + hx^5.$$

Man pflegt aber nicht so wie hier die Coefficienten vor zu schreiben sondern man schreibt sie gewöhnlich z.B.:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \\ -5f \end{matrix}\right\} x \quad + c \,\big|\, x^2 \quad * \quad + e \,\big|\, x^4 \quad + h \,\big|\, x^5.$$

Form einer Function.

Form überhaupt ist die Verbindung der Größen wie sie sich in einem Ausdrucke zeigt. Zwei Functionen dagegen haben einerley Form, wenn in gleichen Gliedern vom Anfang an, einerley Dignitaten der veränderlichen Größe vorhanden sind, wo nicht so haben sie verschiedene Formen. Auf ihre Coefficienten wird übrigens hierbey gar nicht gesehen. z.B.

und die Functionen:

$$2 - 3x^{\frac{1}{2}} + x - 8x^{\frac{3}{2}} + 2x^{2} - x^{\frac{5}{2}} + x^{3} + ..$$

$$1 + 4x^{\frac{1}{2}} + 2x + 7x^{\frac{3}{2}} + x^{2} + 8x^{\frac{5}{2}} ..$$

von einerlei Form, weil sie von Anfang an in gleichen Potenzen von x fortschreiten, obgleich sie nicht einerlei Koeffizienten, Zeichen, und auch nicht gleich Anzahl Glieder haben. denn alles das letztere ist außerwesentlich und gleichgültig.

Für das Wort Funktion braucht man gewöhnlich folgende Buchstaben F. f. φ. ψ; und diese stellen also die Gedanken und den Begriff von einer Funktion in uns hervorbringen, also z. B. Fx; fx. φx. ψx heißt alles Funktion von x.

Zwei Funktionen von einer veränderlichen Größe, würde man so bezeichnen:

$$Fx = 2 - x + x^{2} - 7x^{3} + x^{4} - x^{5} ..$$

$$fx = 3 - 2x + 3x^{2} \quad * \quad + 7x^{4} ...$$

§24.

Das Produkt aus 2 Funktionen von einerlei Form wie F und f, ist ebenfalls eine Funktion von der nämlichen Form.

1.) Das Produkt 2er und mehrerer Functionen von einerlei Form ist eine Funct. derselben Form

Der Verfasser hat hier in seinem Lehrbuche ...

ersten Gliedes heraus kommenden 1 gewählt, weil dies gerade die bequemste Zahl ist, da sie sich am wenigsten verändert z. B. durch Potenzirung, übrigens ist es ganz gleichgültig welche Zahl oder Größe das erste Glied ausmacht. z. B.

Beweis.

X

$$X = 2 - 3x + x^2 - 8x^3 + 4x^4 - 3x^5 + 4x^6$$
$$Y = 1 - 4x - 2x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5$$

	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
2	−3	+1	−8	+4	−3	+4	−16	−8
	−8	+12	−4	+32	−16	+12	+6	−24
		−4	+6	−2	+16	−8	+32	+8
			+16	−24	+8	−64	−16	+8
				+4	−6	+2	−1	
					−2	+3		

$$= 2 - 11x + 9x^2 + 10x^3 + 14x^4 - 3x^5 - 51x^6 + 5x^7 - 16x^8 \ldots\ldots$$

die hier zuletzt als Produkt herausgekommene Function ist nun nach Seite 42, was ebenfalls von ... die Functionen der Functionen.

Da nun die Functionen nicht immer geschlossen sind, sondern ohne Ende fortlaufen, wenn man dann aber eine Operation z. B. hier die Multiplikation mit ihnen vornimmt, so geht man

nur einmal so weit in d. Multiplication treibt, d. h. bis man zum Producte die höchste Potenz von x. die in den gegebenen Functionen ist, erreicht hat, d. h. höheren Grades lässt man ab- dann fort. Schliesst z. B. die eine Function mit x^6 so schliesst auch das Product mit x^6. Aus diesem Grunde sind auch hier die folgenden höheren Potenzen als $x^{9.8+}$ nicht mit aufgenommen.

Anmerkung. Wenn man mehrere Functionen zu vergleichen hat und man braucht dabei einerlei Buchstaben so macht man in d. Regel kleine Strichelchen:

$$Fx = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$
$$fx = a'x + b'x^2 + c'x^3 + d'x^4 + \ldots$$
$$\varphi x = a''x + b''x^2 + c''x^3 + d''x^4 + \ldots$$
$$\psi x = a'''x + b'''x^2 + c'''x^3 + d'''x^4 + \ldots$$

Zusätze.

Man mag nun also Functionen von einerlei Form multipliciren so viel man wolle so ist das Product immer eine Function von derselben Form.

Und dasselbe ist auch die m^{te} Potenz einer Function wieder eine Function von derselben Form.

also $(3 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots px^n)^m =$
$= (u + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots Px^{mn}$;

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ -1 \mp z \\ \hline -z \\ -z \mp z^2 \\ \hline +z^2 \\ +z^2 \pm z^3 \\ \hline -z^3 \\ -z^3 \mp z^4 \\ \hline +z^4 \\ +z^4 \pm z^5 \\ \hline -z^5 \end{array}$$

§25.

Den Quotient anzugeben welcher 1 dividirt durch $1+z$ geben muß.

Es ist aus nebenstehender Operation klar daß die Division den Quotient nach dem eingeschlagenen Gesetz fortsetzen würde, und deshalb könnten wir ihn gleich ohne wirklich zu dividiren in dieser Art fortführen, daß alle ungeraden Potenzen von z negativ u. alle geraden positiv wären, ~~[illegible]~~ jedes folgende Glied aber um eine Potenz von z steigt.

Es frägt sich aber hierbei nun ob wir berechtigt sind aus den ersten Gliedern einer erhaltenen Größe, das Gesetz der ganzen Fortsetzung auch auch für die Folge als allgemein gültig anzunehmen, und dies muß noch bewiesen werden.

In der Analysis können wir nun so wie in der andern ~~Math~~ die Beweise so klar führen, und man gebraucht in der Analys: eigentlich nur zweierlei Arten von Beweisen. nämlich: Beweise durch vollständige Induktion, u die durch unvollständige Induktion, die sich dann folgendergestalt unterscheiden.

haben ich nämlich hier in gegenwärtigem Beispiele das Gesetz des Fortgangs für alle Glieder und den Resten geschloßen, weil ich sie sehe, daß die fortzusetzende Operation immer gleichförmig bleibt, so ist dieser Beweis durch unvollständige Induction geführt.

Bei der vollständigen Induction verfährt man also. so. Man nimmt an das abgeleitete Gesetz sey für irgend ein gewißes Glied und dessen Rest damit in Verbindung steht wahr, und untersucht dann ob, gemäß welcher Veränderung wird es d. den darauf folgenden haben müssen. Findet es sich nun daß das nächstfolgende Glied demselben Gesetze unterworfen ist, u. folge auch, so muß das, nur aus den ersten Gliedern abgeleitete Gesetz allgemeine Gültigkeit haben.

Untersuchen wir nun in bestehenden Fall die Glieder des Quot. u. ihre zugehörigen Reste so finden wir die Reste d. umgekehrten Zeichen und eine Potenz höher als das zugehörige Glied, und also folgendes.

$$\frac{1}{1+z} = \text{Theile d. Quot.}\quad 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots\ldots \pm z^n \mp z^{n+1} \pm z^{n+2} \ldots\ldots$$

$$\text{Theile der Reste.}\quad -z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \ldots\ldots \mp z^{n+1} \pm z^{n+2} \mp z^{n+3}.$$

Z fallen nun nicht unvollständ. Reduktion, und schreibt so zu sagen, die Division.

Und nun die Division so gesucht, so ist es auch keine vollständige Reduktion, wenigstens pflegt man es so zu nennen, jedoch verlässt man sich in solchen Z Fällen ~~nur~~ zu untersuchen was der Quotient ist wenn man $\frac{1}{1-z}$ dividirt, so kann man leicht sehen dass die Combinationen und Potenzen von z dieselben seyn werden, nur dass sich die Zeichen ändern werden. In solchen Fällen thut man gut wenn man die Resultate des Gesetzes sich gleich hinschreibt und dann die Zeichen nach dem neuen Gesetz verändert.

Substituirt man nun hier $-z$ statt dem vorig. $+z$ so erhält man

$$1-(-z)+(-z)^2-(-z^3)+(-z)^4-(-z^5)+\ldots =$$

$$= 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\ldots = \frac{1}{1-z};$$

2) der Quotient zweyer Funktionen von einer Form ist eine Funktion derselben Form.

Wenn man 2 Funktionen von einerlei Form durch einand. dividirt so muss der Quotient auch eine Funktion von derselben Form seyn.

Nun, so wie überall ist es gut wenn man schon im Voraus schematisirt, was und ob eine Form ein Resultat wahrscheinlich od. nothwendig gebe.

seyn wird oder muß, ehe man eine Operation wirklich angefangen.

Hier wird es nun schon im Voraus klar seyn daß d. Quot. eine Funktion von derselben Form als d. Divisor u. also auch d. Dividend seyn müsse, da das Product d. Divis. u. Quot. giebt den Dividend. Funktionen von gleichen Formen geben aber nur wieder gleiche Formen, u. daher d. Quot. von eben d. Form.

Ein deutlicherer Beweis ist folgender: <u>Beweis</u>

$$\frac{X}{Z} = \frac{1+ax+bx^2+cx^3}{1+Ax+Bx^2+Cx^3}$$ zu suchen sey d. Quot.

$$\frac{X}{Z} = X \cdot \frac{1}{Z}\;;$$ setzt man nun statt

$$Z = 1+z.$$ so ist $$\frac{X}{Z} = X \cdot \frac{1}{1+z}$$ also

$$(1+ax+bx^2+cx^3+)\cdot(1-z+z^2-z^3+z^4-\ldots)$$ Seite 48.

Es bleibt also hier nur noch auszumitteln ob der zweite Factor $1-z+z^2$ u. s. w. auch eine Funktion von ähnlicher Form mit fX. sey. Da nun $z = Ax+Bx^2+Cx^3$ ist so substituire man in dem 2t Factor statt $z;\, z^2,\, z^3 \ldots$ ihre Werthe so steht.

$$(1-z+z^2-z^3+z^4-\ldots) = 1 - A\left|\begin{matrix} x & -B \\ x & +A^2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x^2 & -C \\ & +2AB \\ & -A^3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} x^3 & -D \\ & +B^2 \\ & +2AC \\ & -3A^2B \end{matrix}\right|\begin{matrix} x^4 & -E \\ & +2AD \\ & +2BC \\ & -3AB^2 \\ & -3A^2C \end{matrix}\left|\begin{matrix} x^5 - \ldots \\ \\ \\ x^5 \ldots \end{matrix}\right.$$

Setzt man nun für die unstehenden erhaltenen Coefficienten a', b', c' u.s.w. so ist die Reihe

$$1-z+z^2-z^3+\ldots = 1+a'x+b'x^2+c'x^3+\ldots$$

von ~~auch~~ einerlei Form der Function X'. und der Quotient als Product zweier auch von einerlei Form also hier:

$$\frac{X}{Z} = (1+ax+bx^2+)\cdot(1+a'x+b'x^2+c'x^3+\ldots) = 1+\alpha x+\beta x^2+$$

Anschaulicher wird es durch ein Zahlen Beispiel werden. Es seyn also X durch Z zu dividiren.

$$Z = 2+x-3x^2+x^3$$

$$X = 12-2x+2x^2-8x^3+6x^4 \,\big)\, = 6-4x+12x^2-19x^3+\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l} 12+6x \mp 18x^2 \pm 6x^3 \\ \hline -8x+20x^2-14x^3+6x^4 \\ -8x-4x^2+12x^3-4x^4 \\ \;\;+\quad\;\;+\quad\;\;-\quad\;\;+ \\ \hline 0\;+24x^2-26x^3+10x^4 \\ \;\;+24x^2 \pm 12x^3 \mp 36x^4 \\ \hline \quad -38x^3+46x^4 \\ \quad \mp 38x^3 \mp 19x^4 \\ \quad\quad +65x^4 \end{array}$$

aus welchem also klar hervorgeht daß der Quotient eine Function von derselben Form sey.

Weil übrigens die oben sich erhaltenen Divisionen betrifft, so wird das später, b. Verwandlung d. F. in ∞ Reihen vorkommen.

Zusatz 3. d. P. Jede m^{te} Potenz von $\frac{1}{1+ax+bx^2+}$ ist eine Function von d. Form als Nenner nach oben gesetzten. Denn es ist — —

$$\left(\frac{1}{1+ax+bx^2+cx^3}\right)^m = \frac{1^m}{(1+a'x+b'x^2+c'x^3)^m} = 1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4 \text{ usw. §. 49.}$$

Beispiel.

$$(2+x-3x^2+x^3)^{-1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{7}{8}x^2-\frac{17}{16}x^3+\dots$$

$$\begin{array}{l} +1 \\ \pm 1 \pm \frac{1}{2}x \mp \frac{3}{2}x^2 \pm \frac{1}{2}x^3 \\ \hline -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3 \\ \mp\frac{1}{2}x \mp \frac{1}{4}x^2 \pm \frac{3}{4}x^3 \\ \hline +\frac{7}{4}x^2-\frac{5}{4}x^3 \\ \pm\frac{7}{4}x^2 \pm \frac{7}{8}x^3 \\ \hline -\frac{17}{8}x^3 \end{array}$$

3) Die m^{te} Potenz einer F. ist eine Funct. derselben Form

$m = \pm$ ganz oder gebr.: Zahl.

326. Lehrsatz.

Auch dann ist es erlaubt für $(1+ax+bx^2+cx^3)^m$, $1+Ax+Bx^2+Cx^3+\dots$ zu setzen wenn auch m positiv oder negativ, positiv od. negativ gebrochen ist.

I für $+m$ ist es schon bewiesen Art. 45.

II für $-n = m$

$$Z^m = (1+ax+bx^2+cx^3+dx^4)^{-n} = \frac{1}{(1+ax+bx^2+cx^3)^n} = \left(\frac{1}{1+ax+bx^2+cx^3}\right)^n$$

und nach §. 51. $= 1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\dots$

III für $\frac{u}{v} = m$ so ist, $Z^m = (1+ax+bx^2+cx^3)^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{(1+ax+bx^2+cx^3)^u} =$

$= \sqrt[v]{1+a'x+b'x^2+c'x^3}$;

Wenn man sich nun den Begriff d. Wurzelzieh.

annalisirt, so wäre es nichts anders als eine Zerstellung in gleiche Faktoren, derjenigen Größe die unter dem √ Zeichen steht. Diese v gleichen Faktoren nun müssten nothwendig von derselben Form seyn sonst könnte ja nicht die Funktion $1+ax+bx$. entstanden seyn.

IV $m = -\frac{u}{v}$.

$$z^m = \left(1+ax+bx+cx^2+..\right)^{-\frac{u}{v}} = \frac{1}{(1+ax+bx^2..)^{\frac{u}{v}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[v]{(1+ax+bx^2+..)^u}} = \frac{1}{\sqrt[v]{1+a'x+b'x^2+c'x^3}} =$$

$$= \frac{1}{1+Ax+Bx^2+Cx^3} =$$

$$= 1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\ldots\ldots$$

Uebrigens ist es auch hier nicht nöthig, dem Lehrsatze alle Gewißheit u. Strenge zu geben, indem hier eine bloße Aufmerksamkeit schon hinreicht, und anderwärts das bestimmter noch einer kürzern Art bewiesen werden wird.

III Abschnitt d. R.

Algebra.

der Vf. braucht in 27 § eigentlich hier den Ausdruck mathematische Aufgabe falsch, da er hier hätte algebraische Aufgabe sagen sollen.

denn Mathematische Aufgabe ist diejenige die sich nicht eigentlich Math. als Geometrie, Trigonom. und angewandte Math. begreift.

Eine Aufgabe aber die nur durch Algebra aufgelöst werden kann heißt in engerem Sinn algebraisch.

Math. Aufgaben ist eine [illegible] ~~algebr. Aufgaben~~ eine Math. da Algebra ein Theil d. Math. ist. — —

In beiden Arten von Aufgaben müssen Größen gegeben seyn die zu sich u. zu ~~der~~ andern Größen in gewissen Verbindungen stehen.

Aufgelöst ist eine Aufgabe, wenn man die mehrere verlangte Größen durch die Verbindung durch ~~mehrere~~ gegebene Größen bestimmt sind.

Algebra heißt nun der Theil der Analysis der sich mit Auflösung d. Gleichungen beschäftigt, vermittelst deren Algebraische Aufgaben gelöst werden; denn es ist ein großer Unterschied zwischen Buchstabenrechenkunst, Algebra,

und Analysis.

Buchstabenrechnung ist für Algebra und Analysis das was die 4 Species für Zahlenrechnung sind, denn sie lehrt nur die Elementar Operationen die mit Buchstaben vorzunehmen sind.

Sobald die algebraischen Gleichungen es mit veränderlichen Größen zu thun haben, so gehört es in das Gebiet der Analysis.

Sehr häufig werden diese Ausdrücke mit einander verwechselt, gut ist es aber die strengen Grenzen darstellen zu können.

§ 28.

Bekannte Größen nennt man abcd, — unbekannte durch x. y. z.

§ 29

Gleichung heißt ein doppelter Ausdruck einerlei Größe. Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens steht ein Theil der Gleichung: die + und – genommenen Größen heißen Glieder d. Gleichung.

Algebraisch wird die Gleichung wenn sich in ihr ein od. mehrere Glieder befinden die noch bestimmt werden sollen: z. B. $12x = 7+9+15-3$;

§ 30.

Alle Verwandlungen die bei der Auflösung von Gleichungen mit den Größen vorgenommen werden beruhen auf folgenden Grundsätzen:

Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches
—— von —— subtrahirt —— Gleiches.
—— mit —— x. —— Gleiches
—— durch —— divid. —— Gleiches.

Nur muß man beim Auflösen d. Gleichungen immer das Princip vor Augen haben, was ich auf einer Seite des Gleichheitszeichen vornehmen muß ich auch der andern auch thun.

<u>Einfach</u> heißt d. Gleichung wenn ich ihr nur unbekannte Größen mit der 1 Potenz verbunden, je nachdem eine od. mehrere unbekannte Größen in ihr verbunden heißt sie eine Gleichung mit 1, 2, 3, 4 u. s. w. Größen genannt.

Die möglichen Verbindungen in denen nun die unbekannte Größe erscheinen kann sind:

$x + a = b$ — I
$x - c = d$ — II
$ex = f$. — III
$\frac{x}{g} = h$ — IV

und um x allein zu erhalten muß ich mit der

Gleichung immer gerade das entgegengesetzte thun.
In I z. B. ist a zu x addirt daher muß ich ~~beid.~~
Gleichung a subtrahiren, in II ist c subtrahirt,
in III ist x mit e multiplicirt in IV ist g dividirt
daher muß ich in II c addiren in III mit e divid.
in IV d. g. x [illegible]. wie folgt:

$$\begin{array}{l} x+\cancel{a} = b. \\ -\cancel{a} = -a \\ \hline x = b-a; \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-c = d; \\ +c = +c \\ \hline x = d+c; \end{array} \qquad \begin{array}{l} ex = f. \\ \frac{\cancel{e}x}{\cancel{e}} = \frac{f}{e} \\ \hline x = \frac{f}{e}. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{x}{g} = h. \quad (g \\ \hline x = gh. \end{array}$$

Man pflegt x immer + zu suchen u deshalb kann man auch wenn x, −, verschiedene die Zeichen aller umwechseln ohne den Werth zu schaden. z. B.
$-b-x = c$, so würde x und b nach die andere Seite gebracht = $c+b+x = 0$.
Das nennt man eine Gleichung nach 0 reduciren
soll ich nun aus dieser Gleichung x allein haben so subtrahire ich nach beiden Seiten
$c+b$, u das giebt $x = -c-b$.
Das erhält ich nun auch = entgegengesetzt wenn ich die Zeichen umkehrte.

Wenn nun in einer Gleichung
Divisionen vorkommen so muß man diese weg-

weggeschafft

2) nach Verhältnissen wenn die unbekannte Grösse vorkommt auch et weggeschafft

3) dann bringt man die Glieder worin sich die unbekannte Grösse befindet auf die eine Seite die übrigen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens

4) den Theil d. Gleichung wo x ist zerlegt man in Faktoren so daß x ein Faktor ist.

5) dividirt man mit dem andern Faktor die Gleichung. z. B. (Cf. p. 73)

$$\frac{a-x}{b} - \frac{x-c}{a} = d; \quad = a - x - \frac{bx-bc}{a} = bd; \quad =$$

$$a^2 - ax - bx + bc = abd; \quad = -a^2 + ax + bx - bc = -abd$$

$$ax + bx = a^2 + bc - abd; \quad x(a+b) = a^2 + bc - abd; \quad =$$

$$x = \frac{a^2 + bc - abd}{a+b};$$

die erste Gleichung die gegebene heißt die Hauptgleichung, die in d. Mitte die Mittelgleichungen die letzte die Schlußgleichung.

Die Schlußgleichung verlangt man nun immer als den kürzesten Ausdruck, dahin zu gelangen, aber lassen sich keine Regeln geben sondern muß durch Uebung gelernt werden. Hier würde es sein

$$x = \frac{a(a-bd)+bc}{a+b} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a^2 + b(c-ad)}{a+b};$$

Sich nun für die Richtigkeit d. Operation zu überzeugen hat man 1) eine specielle Probe.

2) eine generelle Probe.

Die 1te besteht darin daß man statt der Buchstaben welche bekannte Größen anzeigen, Zahlen nehme u. nach d. gefundenen Schlußgleichung einen Werth für x brauche, diesen Werth sowohl als auch die für a. b. c. d. ... substituire man nun in der Hauptgleichung, und untersuche dann ob die Gleichung noch statt finde. z. B. in

$x = \frac{a^2+b(c-ad)}{a+b}$ seyen $a=4$; $b=6$; $c=3$.

$d=-8$; so ist $\frac{16+6(3-32)}{2} = x$

$x = \frac{158}{2} = -79$.

diese Werthe in d. Hauptgleichung gesetzt, in

$\frac{a-x}{b} - \frac{x-c}{a} = d$ so steht $\frac{-4+79}{6} - \frac{-79-3}{-4}$

$= -8$; $= \frac{75}{6} - \frac{-82}{-4} = -8$;

$12\frac{1}{2} - 20\frac{1}{2} = -8$; d. h. $-8 = -8$.

Bei einer allgemeinen Probe muß man in die gegebene Gleichung den Werth von x -

setzen, und alsdann untersuchen ob beide Theile = sind.

Wenn man dies thun will, so behält man in der

Hauptgleichung immer den unabhängigsten Werth.

also in der Gleichung

$$\frac{a-x}{b}-\frac{x-c}{a}=d \quad ; \text{ für } \quad x=\frac{a^2+bc-abd}{a+b} \text{ gesetzt giebt}$$

$$\frac{a-\frac{a^2+bc-abd}{a+b}}{b}-\frac{\frac{a^2+bc-abd}{a+b}-c}{a}=d.$$

mit a und b beide Theile multiplicirt giebt, um sie auf gleiche Benennung zu bringen.

$$\frac{\frac{a^2+ab-a^2-bc+abd}{a+b}}{b}-\frac{\frac{a^2+bc-abd-ac-bc}{a+b}}{a}=d.=$$

$$=\frac{a^2+ab-a^2-bc+abd}{b(a+b)}-\frac{a^2+bc-abd-ac-bc}{a(a+b)}=d.=$$

$$=\frac{a^2b-abc+a^2bd-a^2b+ab^2d+abc.}{ab(a+b)}=d.$$

$$=\frac{a^2bd+ab^2d}{ab(a+b)}=\frac{abd(a+b)}{ab(a+b)}=d=d.$$

welches nun beweist daß die Auflösung von x

richtig sey.

Damit man nun aber eine bessere Uebersicht behält, wenn solche Ausdrücke in Brüchen

wegzuschaffen sind, damit es sich nun wie man am besten zu multipliciren haben wird.
Das muss nun freilich durch Uebung erlernt werden, und am meisten kommt es darauf an die Größen möglichst zusammenzuhalten, besonders wenn man Parenthesen hat, die nur bekannte Größen haben. Gesetzt man hätte folgende Gleichung so würde man folgendergestalt verfahren.

$$\frac{b-c+ax}{a+c} - \frac{(cx-a-c)(a+d)}{b-c} = b+c.$$

$$\frac{b-c+ax}{a+c} - \frac{cx(a+d)-(a+c)(a+d)}{b-c} = b+c.$$

$$(b-c)^2 + ax(b-c) - cx(a+d)(a+c) + (a+c)^2(a+d) = (b+c)(a+c)\cdot(b-c)$$

$$ax(b-c) - cx(a+d)(a+c) = (b+c)(a+c)(b-c) - (a+c)^2(a+d) - (b-c)^2$$

$$x = \frac{(b+c)(a+c)(b-c) - (a+c)^2(a+d) - (b-c)^2}{a(b-c) - c(a+d)(a+c)}$$

$$x = \frac{(b-c)\left[(b+c)(a+c) - (b-c)\right] - (a+c)^2(a+d)}{a(b-c) - c(a+d)(a+c)}$$

Wird nun ein Zahlenbeispiel gegeben wie folgendes, so wird man wohl thun die vielen

durch Subtrahiren von x nach theilweise abziehen zu suchen, damit der General Nenner nicht zu groß u. die Rechnung zu weitläuftig werde. z.B.

$$x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{20}x - \frac{1}{7}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}x = 500.$$

$$20x - 4x - \frac{5}{3}x - x - \frac{20}{7}x - \frac{5}{2}x - 5x = 10000 = .$$

$$= 10x - \frac{20}{7}x - \frac{5}{3}x - \frac{5}{2}x = 10000.$$

$$= 60x - \frac{120}{7}x - 10x - 15x = 60000.$$

$$= 35x - \frac{120}{7}x = 60000$$

$$= 7x - \frac{24}{7}x = ~~60000~~\ 12000.$$

$$= 49x - 24x = 25x = 84000 = 3360.$$

Ein anderes Beyspiel dazu:

$$\frac{-b\left(1-\frac{bx}{a}\right)}{d} + \frac{x}{a} = \frac{x}{\frac{af}{c}} - \frac{-\left(1-\frac{c}{f}\right)}{b-c} - \frac{-\frac{bcx}{a}}{d};$$

$$= \frac{-ab + b^2x}{ad} + \frac{x}{a} = \frac{cx}{af} - \frac{-f+c}{f(b-c)} - \frac{-bcx}{ad};$$

$$= -ab + b^2x + dx = \frac{cdx}{f} - \frac{-adf + acd}{f(b-c)} + bcx;$$

$$= -abf + b^2fx + dfx = cdx - \frac{-adf + acd}{(b-c)} + bcfx; =$$

verte

$$= dfx + b^2fx - cdx + bcfx = abf + \frac{adf - acd}{(b-c)};$$

$$= x = \frac{abf + \frac{adf - acd}{(b-c)}}{df + b^2f - cd - bcf} = \frac{abf(b-c) + adf - acd}{(b-c)(df + b^2f - cd - bcf)};$$

$$x = \frac{ab^2f - abfc + adf - acd}{(b-c)(df + b^2f - cd - bcf)} = \frac{a(b^2f - bfc + df - cd)}{(b-c)(b^2f - bcf + df - cd)};$$

also $x = \frac{a}{(b-c)}$;

§33.

Ausdrücke mit mehreren unbekannten Grössen.

Die Auflösung solcher Ausdrücke kann auf einem 3fachen Wege versucht werden.

1 durch Eliminiren

Man sucht hierbei aus jeder der gegebenen Gleichungen zuförderst den Werth einer einzigen unbekannten Grösse zu suchen, und betrachtet hierbei die übrigen unbekannten Grössen als bekannte. Aus den gefundenen Werthen werden nun so viele neue Gleichungen zusammengesetzt, als noch unbekannte Grössen übrig sind, in welcher Ordnung dies geschieht ist ~~überflüssig~~ gleichgültig,

und dieser durch die Zusammensetzung erhaltenen
Gleichungen verfährt man alsdann ebenso wie
wie mit den gegebenen. Diese Arbeit setzt man
alsdann so lange fort bis man endlich eine
Gleichung bekommt worin nur noch eine unbe-
kannte Größe zu suchen ist. Ist deren Werth
gefunden so setzt man denselben in den Werth
der nächstvorhergegangenen unbekannten Größe
fährt in gleicher Art rückwärts weiter fort,
bis endlich jede unbekannte Größe durch be-
kannte bestimmt ist.

2) durch Substitution.

Das Verfahren hierbei ist: Man sucht aus einer
Gleichung den Werth einer der unbekannten
Größen, indem man ebenfalls die übrigen Größen
als bekannt voraussetzt. Diesen Werth setzt
man unmittelbar in jede der andern Gleichungen
und berechnet dieselben möglichst. Aus einer der-
selben sucht man wieder eine andere unbekannte
Größe, und setzt diesen gefundenen Werth
wieder in die andern Gleichungen die noch übrig

sind, und so fährt man weiter fort bis man
zuletzt auf eine Gleichung kommt wodurch man
noch eine unbekannte Größe zu bestimmen ist.
Ist der Werth gefunden so geht man rückwärts
wie beim Eliminiren, und bestimmt den Werth
einer jeden unbekannten Größe.

3) durch Addition u. Subtraction.

Hier besteht nun das wesentliche darin, daß man
2 und 2 Gleichungen so einrichtet, daß in ihnen
eine Größe durch Addition od. Subtract. gänzlich weg
fällt, um diesen Zweck zu erreichen muß
man erstlich wechselseitig mit den Coefficienten
der Größen welche wegfallen sollen, die Größen
multipliciren. Eben so verfährt man hier fort
bis man auf eine Gleichung kommt, wo man
nur noch eine unbekannte Größe findet, und
dann geht man gleichfalls rückwärts bis man
alle Größen durch bekannte bestimmt hat.

Wenn nun aber überhaupt solche Aufgaben
mit mehreren unbekannten Größen aufgelöst
werden sollen, so ist es nothwendig

daß sie unter einander wesentlich verschiedene Gleichungen enthalten in denen die unbekannten Größen vorkommen.

Beispiel des Eliminiren.

1) $3x - 2y + z = a$; 2) $2x - y + 5z = b$; 3) $x + 3y - 2z = c$;

4) $x = \frac{a + 2y - z}{3}$; 5) $x = \frac{b + y - 5z}{2}$ 6) $x = c - 3y + 2z$.

aus $4 = 5$.

$\frac{a+2y-z}{3} = \frac{b+y-5z}{2}$

$2a + 4y - 2z = 3b + 3y - 15z$.

6) $y = 3b - 2a - 13z$;

aus $4 = 6$.

$\frac{a+2y-z}{3} = c - 3y + 2z$.

$a + 2y - z = 3c - 9y + 6z$.

7) $y = \frac{3c - a + 7z}{11}$

aus $6 = 7$.

$3b - 2a - 13z = \frac{3c - a + 7z}{11}$.

$33b - 22a - 143z = 3c - a + 7z$.

$z = \frac{33b - 21a - 3c}{150}$;

$z = \frac{11b - 7a - c}{50}$ Setzt man den Werth für z in die Gleichung 6 substituirt gehabt.

$y = 3b - 2a - \left(\frac{11b - 7a - c}{50}\right) \times 13$; $= \frac{150b - 100a - 143b + 91a + 13c}{50}$.

und endlich $y = \frac{7b - 9a + 13c}{50}$ Setzt den Werth für y und z in die Gleichung 4 gesetzt, so ist $x = \frac{a + \frac{14b - 18a + 26c}{50} - \frac{11b - 7a - c}{50}}{3}$ und

$x = \frac{50a + 14b - 18a + 26c - 11b + 7a + c}{3.50}$.

$x = \frac{39a + 3b + 27c}{3.50} =$; $x = \frac{13a + b + 9c}{50}$.

Die Werthe wären also $x = \frac{13a + b + 9c}{50}$; $y = \frac{7b - 9a + 13c}{50}$; und $z = \frac{11b - 7a - c}{50}$.

So jeder Werth allgemein bestimmt, so erhält man in jeder derselben Ausgaben. Wenn da doch für die Buchstaben a, b, c u.s.w. + einer wirklichen Auflösung Zahlen gegeben sind, so könnte man leicht die letztere unbekannte Größe in Zahlen ausdrücken u. ihren Zahlen Werth in den gleichen Gleichungen setzen u.s.w.

So wie + den Gleichungen mit einer unbekannt. Größe, so giebt es auch hier eine doppelte Art die Probe zu machen ob man richtig gerechnet habe.

nämlich einmal durch Zahlen, u. 2tens durch die im Werthe erhaltenen allgemeinen Größ- selbst.

Bei der Probe mit allgemeinen Größen muß ich aber nie die Gleichung zur Probe Gleichung benutzen aus welcher ich den letzten Werth von der unbekannten letzten Größe entwickelt habe, indem ich sonst leicht Irrthümer nicht bemerken könnte indem ich sie umkehrte begehe, also hier nicht aus der Gleichg, 1 oder 4. sondern aus einer andern; ob ich mich dann überzeugen würde daß ich richtig gerechnet habe.

Wenn wir hier also die 2te Gleichung nehmen so ist

$2x - y + 5z = b$. und für x, y, z ihre Werthe;

$$\frac{26a + 2b + 18c}{50} - \frac{7b - 9a + 13c}{50} + \frac{55b - 35a - 5c}{50} = b$$

und $\frac{26a + 2b + 18c - 7b + 9a - 13c + 55b - 35a - 5c}{50} = b.$

abgekürzt $\frac{50b}{50} = b = b$. also die Rechnung richtig.

2te Weg durch Substitution Beyspiel.

1) $3x - 2y + z = a$ 2) $2x - y + 5z = b$;   3) $x + 3y - 2z = c$;

aus 1); (4) $z = a - 3x + 2y$; (4 in 2 u. 3.); $2x - y + 5a - 15x + 10y = b$; $x + 3y - 2a + 6x - 4y = c$

abgekürzt u. geordnet — (7) $5a - 13x + 9y = b$; (8) $7x - y - 2a = c$

aus Gleich. 7, x gesucht $x = \frac{5a - b + 9y}{13}$ diesen Werth gesetzt in 8.

$$\frac{35a - 7b + 63y}{13} - y - 2a = c.$$

$$35a - 7b + 63y - 13y - 26a = 13c$$

$$y = \frac{7b + 13c - 9a}{50}$$ welches

derselbe Werth ist den wir auf dem ersten Wege durch Eliminiren von y erhalten.

x u. z zu suchen verfährt man nun nach dieselbe Weise wie beim Eliminiren.

Da die Auslösung keinen nun nicht mehr in jeder gegebenen Gleichung alle unbekannten Grössen

vor, und man kann also den 1ten Weg nicht immer anwenden. Dieser Weg ist aber überall anzuwenden, und nächstdem daß er weit umfassender ist als jener, hat er noch den Vortheil daß er weit kürzer ist.

3te Weg durch Addition od. Subtraction

Man muß also wie oben schon gesagt suchen zu machen daß eine der unbekannten Größen wegfallen muß. Welche Gleichung man nun aber von gemeinschaftlichen Stücken von der andern abzieht, da muß man auf die Folge sehen, daß man jetzt die Größe die man herauch heraus schaffen will positiv erhält:

+.

1) $3x - 2y + z = a$;   2) $2x - y + 5z = b$;   3) $x + 3y - 2z = c$.

um z weg heraus zu schaffen von 1) und 2). so × man 1 × 5 =   und No 1 & 3.

$-15x \mp 10y \pm 5z = -5a$; $6x - 4y + 2z = 2a$
$2x - y + 5z = b$ $x + 3y - 2z = c$

4) $-13x + 9y = b - 5a$ 5) $7x - y = 2a + c$.

Soll nun von No 4 und 5 x geschafft werden so ist's klar umschichtig multipliciren also:

No 4. × 7 x weil $= -91x + 63y = 7b - 35a$

No 5 × 13 x weil es $\mp 91x \pm 13y = \pm 26a \pm 13c$.

$50y = 7b - 9a + 13c$.

$y = \frac{7b - 9a + 13c}{50}$ wie vorhin.

Noch ein Beispiel welches zugleich beweisen soll daß nicht überall der nächste Weg zu nehmen ist sondern daß sich das 2te wegzuschaffen gesucht werden muß.

1) $x+y=a$ 2) $y+z=b$; 3) $z+x=c$

7) $x+b-c+x=a$ 5) $y+c-x=b$ 4) $z=c-x$.

8) $x=\frac{a-b+c}{2}$ 6) $y=b+x-c$ 12) $z=c-\frac{a-b+c}{2}$

9) $y=b-c+\frac{a-b+c}{2}$ 13) $z=\frac{2c-a+b-c}{2}$

10) $y=\frac{2b-2c+a-b+c}{2}$ 14) $z=\frac{b+c-a}{2}$

11) $y=\frac{b+a-c}{2}$

Geschieht wohl durch Elimin[ation]

$x=a-y$
$x=c-z$
und 2.

$a-y=c-z$
$y=z+a-c$
$y=b-z$
$z+a-c=b-z$
$2z=b+c-a$
$z=\frac{b+c-a}{2}$

auch durch Addition

$x+y=a$
$z+y=b$
$x-z=a-b$
$x+z=c$
$2x=a+c-b$
$x=\frac{a-b+c}{2}$

Wäre nun aber zum B. folgende Aufgabe gegeben

$\overset{1}{x+y}=a$; $\overset{2}{y+z}=b$; $\overset{3}{z+v}=c$; $\overset{4}{v+x}=d$;

so wird man wenn man nachzulösen anfängt nur eine unbekannte Größe wegschaffen sehen u. also die Aufgabe sich nicht auflösen (d.h. ohne unbestimmte Analysis) lassen. Untersucht man sie aber genauer so wird man finden daß diesen Gleichungen, die Hauptbedingung fehle, d.h. daß sie nicht wesentlich von einander verschieden sind, denn sie addirt und 1 u. 3, u. 2 u. 4;

$x=a-y$
$v+a-y=d$
$y=v+a-d$
$x+v+a-d=a$
$x=a-v-a+d$
$v+a-v-a+d=d$
$d=d$.

$$\begin{array}{l} x+y=a \\ z+v=c \\ \hline x+y+z+v=a+c; \end{array} \qquad \begin{array}{l} y+z=b \\ v+x=d \\ \hline x+y+z+v=b+d; \end{array}$$

Bei der Auflösung solcher Aufgaben muss man überhaupt vorzüglich auf die Form der Gleichungen sehen; findet man z.B. daß sie alle nach einem gewissen Gesetze fortschreiten so muss man auch in der Auflösung dasselbe Gesetz auszuführen suchen. z.B.

I $\frac{2}{x} - \frac{3}{2y} + \frac{1}{z} = a$ II $\frac{1}{2x} + \frac{2}{3y} - \frac{4}{3z} = b$; III $\frac{2}{3y} - \frac{2}{x} + \frac{3}{4z} = c$

2) $\frac{2}{2x} - \frac{3}{4y} + \frac{1}{2z} = \frac{1}{2}a$ $\frac{2}{2x} + \frac{4}{3y} - \frac{8}{3z} = 2b$; I $-\frac{3}{2y} + \frac{2}{x} + \frac{1}{z} = a$

$-\frac{5}{6y} + \frac{7}{4z} = a + c$ IV

I ÷ $\frac{2}{2x} - \frac{3}{4y} + \frac{1}{2z} = \frac{1}{2}a$

$\frac{25}{12y} - \frac{19}{6z} = 2b - \frac{1}{2}a$

die Gleichung IV mit $\frac{5}{2}$ multiplicirt − IV. $-\frac{25}{12y} + \frac{35}{8z} = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c$

addirt = $\frac{29}{24z} = 2a + 2b + \frac{5}{2}c$

$29 = z(48a + 48b + 60c)$

$z = \frac{29}{48a + 48b + 60c}$

Wenn man nun z in IV substituirt findet man y und beide substituirt in I, II od. III ergiebt sich x.

Noch ein Beispiel mit lauter Buchstaben Größen um zu sehen was für Kunstgriffe man sich bedient um theils weniger, kürzer, und sicherer zum Ziele zu gelangen: z.B.

I: $ax + by + cz = m$ II: $dx + ey + fz = n$; III: $gx + hy + iz = p$.

a) $adx + bdy + cdz = dm$ a) $adx + aey + afz = an$;

$\mp adx \mp aey \mp afz = \mp an$

IV $y(bd - ae) + z(cd - af) = dm - an$

$\frac{g}{a}$. I und III x-mal.

I. $agx + bgy + cgz = gm$

III $\mp agx \mp ahy \mp aiz = \mp ap$.

V $y(bg - ah) + z(cg - ai) = gm - ap$.

Nennen wir nun der kürzern Rechnung wegen

$(bd - ae) = a'$

$(cd - af) = b'$ geschieht hier z.B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$(bg - ah) = c'$ giebt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ oder $\frac{a}{b} = m$

$(cg - ai) = d'$ [illegible]

$(dm - an) = m'$

$(gm - ap) = n'$

so ist IV $a'y + b'z = m'$ mit c' x-mal $= a'c'y + b'c'z = c'm'$

und V $c'y + d'z = n'$ mit a' x-mal; $\mp a'c'y \mp a'd'z = \mp a'n'$

$$z(b'c' - a'd') = c'm' - a'n'$$

und $z = \frac{c'm' - a'n'}{b'c' - a'd'}$ setzt man nun

für die accentuirten Buchstaben ihre Werthe, so ist:

$$z = \frac{(bg - ah)(dm - an) - (bd - ae)(gm - ap)}{(cd - af)(bg - ah) - (bd - ae)(cg - ai)}$$

setzt man nun auch hier den Werth für z in IV und V so erhält man y und so auch das der Werth von z und y in I. II. oder III auch x. Suchen wir ~~nach~~ y so ist nach der gleichung IV u. V a) $a'y + b'z = m'$ und b) $c'y + d'z = n'$

$a'd'y + b'd'z = d'm'$ $b'c'y + b'd'z = b'n'$

$\mp b'c'y \mp b'd'z = \mp b'n'$

$y(a'd' - b'c') = d'm' - b'n'$ $= y = \frac{d'm' - b'n'}{a'd' - b'c'}$,

und statt dem Werth gesetzt ist $y = \frac{(cg - ai)(dm - an) - (cd - af)(gm - ap)}{(bd - ae)(cg - ai) - (cd - af)(bg - ah)}$,

Wäre nun z. B. ein Fall folgendergestalt zum Auflösen gegeben, so würde es sehr weitläuftig seyn nach dem gewöhnlichen Wege der Substitution zu verfahren und es würde dann am vortheilhaftesten seyn, so zu verfahren:

$$\frac{xy}{ay+bx} = m \qquad \frac{yz}{cz+dy} = n \qquad \frac{zx}{ex+fz} = p$$

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{1}{m} \qquad \frac{cz+dy}{yz} = \frac{1}{n} \qquad \frac{ex+fz}{zx} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{1}{m} \qquad \frac{c}{y} + \frac{d}{z} = \frac{1}{n} \qquad \frac{e}{z} + \frac{f}{x} = \frac{1}{p} \quad \text{div. } f$$

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{m} - \frac{b}{y} \;(\beta) \qquad \frac{c}{y} = \frac{1}{n} - \frac{d}{z} \;(\alpha) \qquad \frac{e}{fz} + \frac{1}{x} = \frac{1}{fp} \quad \times a$$

$$\frac{ae}{fz} + \frac{a}{x} = \frac{a}{fp}$$

für $\frac{a}{x}$ den Werth in β: $$\frac{ae}{fz} + \frac{1}{m} - \frac{b}{y} = \frac{a}{fp} \quad \text{div. durch } b$$

$$\frac{ae}{bfz} + \frac{1}{bm} - \frac{1}{y} = \frac{a}{bfp} \quad \times c$$

$$\frac{ace}{bfz} + \frac{c}{bm} - \frac{c}{y} = \frac{ac}{bfp}$$

für $\frac{c}{y}$ den Werth in α: $$\frac{ace}{bfz} + \frac{c}{bm} - \frac{1}{n} + \frac{d}{z} = \frac{ac}{bfp}; =$$

$$\frac{acemnp + cfnpz - bfmpz + bdfmnp}{bfmnpz} = \frac{acmnz}{bfmnpz}; =$$

$$acmnz + bfmpz - cfnpz = acemnp + bdfmnp; \text{ also } z = \frac{mnp(ace + bdf)}{acmn + fp(bm - cn)}$$

Um nun in irgend einer Gleichung vor y den Werth von z zu substituiren [illegible], so würde man [illegible] wenn man von d [illegible] allen obenstehenden Gleichungen der Fall ist eine Gleich[ung] [illegible] vor y im Nenner [illegible] würde [illegible] [illegible] α.

$$\frac{y}{c} = n - \frac{z}{d} \; ; \; y = cn - \frac{cz}{d}$$

$a = b$ giebt $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

$$y = cn - \frac{c(mnp(aec+bdf))}{d(aemn+fp(bm-cn))} =$$

Seine Substitution von x würde man auch so [illegible] [illegible] β.

$$\frac{x}{a} = m - \frac{y}{b} \; ; \; x = am - \frac{ay}{b} \; ;$$

$$x = am - \frac{a}{b}\frac{(cnmp(aec+bdf))}{d(aemn+fp(bm-cn))}.$$

Der Schüler kann sich Seite 67 zu den Algebraischen Aufgaben [illegible] Die Hauptsache einer solchen Aufgabe ist dem vorigen bekannt; nämlich aus den oder einigen bekannten Größen und ihren gegebenen Verbindungen die unbekannten Größen zu finden. [illegible] heißen sie wenn sich aus ihnen so viel Gleichungen ableiten lassen als unbekannte Größen.

NB. Man könnte allhier [eine] Veränderung der Gleichung auch die Art annehmen, daß man die Bruchform derselben umkehren kann ohne die Gl. zu ändern. Allein in diesem Falle muß jede Seite der Gl. in einem Ausdrucke gefasset seyn z. B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ giebt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ oder $\frac{a}{b} = m$ giebt $\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{1}{m}$ giebt $\frac{b}{a} = m$, unter a, b, m mag man eine Anzahl Glieder verstehen die aber sämtlich nur einen Bruch ausmachen. Der Grund davon ist klar, denn wenn beyde Brüche = sind durch das Verhältniß des Zählers zum Nenner oder des Dividenden zum Divisor, so sind sie auch gleich durch das umgekehrte Verhältniß des Divisors zum Dividenden. Ist aber die Seite der Gl. nicht in einem Ausdruck gefasset alsdenn wird durch die Umkehrung die Gl. nothwendig verdorben, denn jede Seite hat unterschiedene Bestandtheile, und diese werden nicht auf dieselbe Weise verändert wenn man sie umgekehrt [illegible]. Aus diesem Grunde ist das Beyspiel p. 72 richtig, das pag 73 falsch.

$\frac{xy}{ay+bx} = m$ giebt $xy = aym + bmx$

$(y-bm)x = aym$

$x = \frac{aym}{y-bm}$

dasselbe giebt $\frac{ay+bx}{xy} = \frac{1}{m}$

$may + bxm = xy$

$amy = (y-bm)x$

$\frac{amy}{y-bm} = x$

Ferner $\frac{c}{y} = \frac{1}{n} - \frac{d}{z}$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{cn} - \frac{d}{cz}$

$1 = \frac{y}{cn} - \frac{dy}{cz}$

$cncz = czy - cndy$

$cnz = zy - ndy$

α) $y = \frac{cnz}{z-nd}$

$\frac{y}{c} = n - \frac{z}{d}$ giebt ganz was anders

$y = cn - \frac{cz}{d} = \frac{(nd-z)c}{d}$

Man muss also $\frac{c}{y} = \frac{1}{n} - \frac{d}{z}$

erst in $\frac{c}{y} = \frac{z-nd}{nz}$ verwandeln,

dabei kommt die rechte Seite ein Quotient wird, und dann umkehren

so wird $\frac{y}{c} = \frac{nz}{z-nd}$

$y = \frac{cnz}{z-nd}$ wie bei α)

Ein specielles Beispiel macht die Sache noch deutlicher.

vorhanden sind, und diese müssen daher also nothwendig unter einander wesentlich verschieden seyn. Nun entsteht aber die Frage, welches sind die Regeln wornach bei einer Aufgabe eine oder mehrere Gleichungen abgeleitet werden können? Hierauf läßt sich aber keine, wenigstens keine allgemeine Antwort geben. Die Aufgaben sind so mannigfaltiger Art, daß fast jede ihre eigenen Regeln haben müßte, und die Erfindung bleibt daher nur dem Verstande der Lernenden und ihrem eigenen Scharfsinn. (Schultze Meyer Hirsch).

Ein paar Hauptregeln wären folgende:

1) man muß zuvörderst bei Auflösung einer Aufgabe die unbekannten Größen genau von den bekannten unterscheiden. 2) muß er genau die Verbindungen zeigen, in denen diese unbekannten Größen mit den bekannten stehen, nicht allein wegen Erfindung der Gleichungen, sondern auch ihrer eigenen Benennung wegen; denn oft könnte es vorkommen, daß man mit weniger unbekannten Größen zu thun hat als man anfangs glaubt.

Nach diesen Vorschriften kann ich nun auch die Auflösung der Gleichung selbst an.

Aufgabe

Eine Zahl Hälfte, Drittel, u Viertel soll 3 mehr betragen als die Zahl selbst.

Auflösung. die Zahl sey x. so ist

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 3 = x$$

$$6x + 4x + 3x - 36 = 12x$$

$$x = 36.$$

Nach jeder Auflösung ist es nun ein Versuch zu machen ob wirklich die gefundene Zahl der Aufgabe Genüge leistet.

II Aufgabe.

Es ist die Summe = s und Differenz = d zweyer Zahlen gegeben, man soll die Zahlen finden.

Auflösung die Zahlen sey x und y. so ist

$$x + y = s. \qquad x - y = d$$

$$-x + y = d \qquad x + y = s.$$

$$2y = s - d \qquad 2x = s + d$$

$$y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d \qquad x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d.$$

Also in Worten ausgedrückt. die grössere Zahl besteht aus der ½ Summe u d. ½ Differenz, die kleinere

x

$s - x$

$$x - s + x = d$$

$$2x = d + s$$

$$x = \frac{d+s}{2}$$

$$y = \frac{2s - d - s}{2} = \frac{s-d}{2}$$

Zeugen und die halben Summe weniger der halben Differenz.

Obgleich bei dieser Aufgabe 2 unbekannte Größen hier gesucht worden sind, so ist es streng genommen nur nöthig eine zu suchen, indem sie sich zugleich aus der Summe die andere ergiebt. z.B.

die eine zu suchende Größe sey z. so ist die andere $s-z$. also:

$$z-(s-z)=d\ ;$$

$$2z-s=d$$

$z=\frac{s+d}{2}$; daraus ist, da auch die andere Größe $s-z$ ist, wenn man für z seinen Werth setzt:

$$s-z=s-\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d\ ;\ =\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d$$

welches in vorstehender Auflösung ebenfalls der Fall war

Seite 72 fragt Ws.

Aufgabe.

Eine Zahl a in vier Theile x, y, z w zu theilen welche sich wie 4 gegebene Zahlen m, n, p, q. gegen

einander verhalten sollen.

Die Bedingungen der Aufgabe geben also folgendes:

$x+y+z+w = a$ und $x:y:z:w = m:n:p:q$

$x:y = m:n$ ~~$y:z = n:p$~~ ~~$z:w = p:q$~~

$ym = xn$ ~~$zn = yp$~~ ~~$wp = zq$~~

$y = \frac{nx}{m}$ ~~$z = \frac{py}{n}$~~ ~~$w = \frac{qz}{p}$~~

Setzt man nun die hier $x:z = m:p$ $x:w = m:q$

erhaltenen gefundenen Werthe für $x = \frac{zm}{p}$ $x = \frac{mw}{q}$

y, z und w, die durch bekannte $z = \frac{px}{m}$ $w = \frac{xq}{m}$

Zahlen und x bestimmt werden, so ist:

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} + \frac{qx}{m} = a$$

$$mx + nx + px + qx = am$$

$$x = \frac{am}{m+n+p+q}$$

| $x : 1 = am : m+n+p+q$
| $x : a = m : m+n+p+q$

y war $= \frac{nx}{m} = \frac{n}{m}x$ mithin. $m+n+p+q : a = m : x$.

$$y = \frac{an}{m+n+p+q};$$

z war $= \frac{px}{m} = \frac{p}{m}x$ also:

$$z = \frac{ap}{m+n+p+q},$$

w war $= \frac{qx}{m} = \frac{q}{m}x$. daher.

$$w = \frac{aq}{m+n+p+q}$$

Mit bekannt läßt sich nun jeder Theil der einen

Größe gleich ist, mit dieser in eine Proportion stellt

ist $a = \frac{bc}{d} = d : b = c : a$.

od. $a = \frac{m}{n} = n : 1 = m : a$

Dieß heißt angewandt giebt für unbestimmte

Verhältnisse folgende Proportionen.

Die Gesellschaftsrechnung algebr: aufgelöst.

$m + n + p + q : a = m : x$

$m + n + p + q : a = n : y$

$m + n + p + q : a = p : z$

$m + n + p + q : a = q : w$

Wenn also eine Größe nach einem gewissen Verhältniß getheilt werden soll, so addirt man alle Verhältnißzahlen und schließt: Wie d. Summe aller Verhältnißzahlen, sich zur Zahl a verhält, so verhält sich jede einzelne Verhältnißzahl, zu einem der gesuchten Theile.

Hieraus bestimmt sich nun die sogenannte Gesellschafts Rechnung, die sehr häufig in Anwendung kommt. z. B. –

Aufgabe

Es sollen zu einem gewissen Zweck 200 Arbeiter von verschiedenen Dorfschaften gegeben werden

wenn Anzahl der arbeitsfähigen Leute verschieden ist. z.B.

1te stellt 800 — also hier ist $m + n + p + q = 4000$

2. — 1200 — $a = 200.$

3. — 900 — das Verhältniß $4000 : 200 = 20 : 1.$

4. — 1100

4000

$20 : 1 = 800 : x = 40$ Mann

$20 : 1 = 1200 : y = 60$ —

$20 : 1 = 900 : z = 45$ —

$20 : 1 = 1100 : w = 55$ —

= 200 Mann.

Aufgabe.

Ein Eimer Wein kostet von A, 8 Gulden $= a$ fl. ein Eimer der Wein B kostet $b = 12$ Gulden. Man will 1000 Eimer $= m$ Eimer mischen so daß der Eimer $10 = n$ Gulden kosten soll.

Nennen wir die Anzahl der Eimer von der einen Sorte $A = x$ so ist die Anzahl der andern die zur Mischung genommen werden müssen $1000 - x$. Die Sorte A die zur Mischung kommt soll also ax fl kosten und diese [illegible] der andern $b(1000 - x)$ muß gleich sein dem Preise von $m \times n$. daher steht:

$$ax + b(\overset{m}{1000} - x) = mn$$

$$ax + bm - bx = mn$$

$$ax - bx = mn - bm$$

$$x = \frac{m(n-b)}{a-b}$$

Für die andere Sorte $m - x = y$ steht

$$y = m - \frac{mn - bm}{a-b} = \frac{am - bm - mn + bm}{a-b}$$

$$y = \frac{m(a-n)}{a-b}$$

Abschnitt IV wird der zu bekannten Dinge wegen über-
gangen aber

Abschnitt V.

dieser Abschnitt ist von großer Wichtigkeit, nicht allein für Zahlen, sondern auch im weiteren Verfolg der Rechenkunst.

Die nächste Anwendung betrifft nun die Verhältniß von Größen, welche [illegible] oft in zu unbehülflichen Größen ausgedrückt sind, und man [illegible] ohne Beeinträchtigung eine bedeutende zu schreiben in kleinere Zahl ausdrücken will.

Kettenbrüche

Die Ausdrücke Zusammenhangende, continuirliche u. Kettenbrüche sind gleichbedeutend.

Ein Kettenbruch ist ein gewöhnlicher Bruch mit der Bemerkung daß er aus einer ganzen Zahl besteht und dem Zusatze eines Bruchs mit der Eigenthümlichkeit, daß der Zähler immer 1, und der Nenner eine ganze Zahl etc. welche [illegible] zu setzen eines solchen Bruchs ist. die ganze Zahl am Anfange kann übrigens fehlen, und sie zeigt blos an etc. der Bruch ein ächter oder unächter war. etc.

z. B. $4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}$ oder $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}$

Wenn man einen Bruch in einen Kettenbruch verwandeln soll, so beruht das ganze Verfahren darauf daß man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividiren ~~auf~~ kann ohne den Werth des Bruchs zu ändern. Dividire ich nun bey einem solchen ächten Bruch, (die unächten macht es zuförderst durch Herausziehen der Ganzen dazu) Zähler und Nenner jedesmal durch den Zähler, so ist es klar daß ich zum neuen Zähler nothwendig immer 1 erhalten muß.

Diese Operation des Dividirens des Bruchs durch seinen eigenen Zähler setzt man nun so lange fort bis man ~~[illegible]~~ auf einen ~~Bruch~~ anfänglichen stößt dessen Zähler = 1 ist, wo also wie bekannt die Division aufhört. Die Operation wäre also folgende. Es sey zu verwandeln:

$\frac{2939}{1270}$

$1270)\,2939\,(2$; 2540; 399

$2+\frac{399}{1270} = 2+\cfrac{1}{3+\frac{73}{399}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\frac{34}{73}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\frac{5}{34}}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\frac{4}{5}}}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}$

$399)\,1270\,(3$; 1197; 73

$73)\,399\,(5$; 365; 34

$34)\,73\,(2$; 68; 5

$5)\,34\,(6$; 30; 4

$4)\,5\,(1$; 4; 1

$\frac{1}{4}$

$2+\frac{399}{1270}$ $\frac{399}{1270} = \cfrac{1}{3+\frac{73}{399}}$ $\frac{73}{399} = \cfrac{1}{5+\frac{34}{73}}$

$2+\cfrac{1}{3+\frac{73}{399}}$ $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\frac{5}{34}}}}$ $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}}}}$ $\frac{34}{73} = \cfrac{1}{2+\frac{5}{34}}$

$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\frac{34}{73}}}$

$\frac{5}{34} = \cfrac{1}{6+\frac{4}{5}}$ $\frac{4}{5} = \cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}$

Um nun also allgemein einen ~~[illegible]~~ Bruch $\frac{A}{B}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, ~~folge~~ so ... bei Verfahren das folgende.

Man dividire den Zähler A durch den Nenner B, merke den herausbekommenen Quotienten und den Rest; durch diesen Rest dividire man den Nenner B, und merke wiederum Quotient und Rest. Mit diesem Rest dividire man den nächst vorhergehenden Rest, und merke dieses wieder Quotient u. Rest, und so fahre ich in der Division jedes vorhergehenden Restes durch den zuletzt erhaltenen Rest fort, bis man nicht einen Rest $=0$ od. 1 bekömt, wo alsdann natürlich die Division schon aufhört. also

Quotient $= C\ D\ E\ F\ G \ldots$
Reste $= a\ b\ c\ d\ e \ldots$

$$\frac{A}{B} = C + \frac{a}{B};$$
$$\frac{B}{a} = D + \frac{b}{a};$$
$$\frac{a}{b} = E + \frac{c}{b}$$
$$\frac{b}{c} = F + \frac{d}{c}$$
$$\frac{c}{d} = G + \frac{e}{d} \text{ u. s. w.}$$

Nun ist aber $\frac{a}{B}$ weiter nichts als $\frac{1}{D+\frac{b}{a}}$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{E+\frac{c}{b}}\ ;\ \frac{c}{b} = \frac{1}{F+\frac{d}{c}}\ ;\ \frac{d}{c} = \frac{1}{G+\frac{e}{d}} \ldots$$

also ist der gegebene Bruch =

$$\frac{A}{B} = C + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{F + \cfrac{1}{G + \frac{c}{d}}}}}$$

Einen ächten Bruch kann man also in einen Kettenbruch nur auf folgende kürzere Art verwandeln, wenn man nur aber angegebenen Operation den Quotient. Einen Bruch erhält dessen Zähler 1 und Nenner der ~~erste~~ 2te Quotient ist, und einen Bruch dessen Zähler wieder 1 und der Nenner d. 3te Quotient u.s.w. dann selbst gesuchte Bruch ist u. s. f.

Wenn man nun z. Seite 81 (hier) die nach und nach erhaltenen Theile der ~~erhaltenen~~ Kettenbrüche nebst der zuerst erhaltenen Zahl 1 in ein Brüchen wieder verwandelt so entstehen daraus Partial- od. Näherungs-Brüche.

Partial Brüche

Näherungsbruch heißt ein solcher Bruch deshalb weil er sich dem gegebenen ~~Bruch~~ Werth des Bruchs, nähert, aber nicht vollkommen gleich ist. Je mehr man nun solche Theile des Bruchs zusammennimmt desto näher kommt man dem wahren Werth des Bruchs, bis er endlich den Bruch selbst wieder erhält.

\+ oder der 1te Partialbruch

Es kömt darauf an, sich leicht [illegible] die in § 85 angeführte Tabelle zu verschaffen. — Ist der Bruch [illegible] ächt, alsdann ist das 1te Glied des Kettenbr.+ eine ganze Zahl und zwar der erste Quotient selbst (2), daher muß der erste Hülfszähler 1 seyn, damit 1 multiplicirt den Quotienten nicht [illegible]. [illegible] 1 [illegible] zugleich der Zähler von $\frac{1}{3}$ und durch dieses nun zum Producte 2×3 addirt zu werden, um den 2ten Zähler zu bilden (7). Weil der zwei ersten Nenner [illegible] unbekannt ist, so macht man auch vorwärts 1 als ersten Nenner [illegible], denn $2 \times 0 = 0$, daher ist es besser die 0 als Hülfszahl nicht zu gebrauchen, sondern, da bei einem unächten Bruche der erste P. B. ganze Zahl ist, und daher der entsprechende Nenner 1 seyn muß, so stellt man die Regel auf, daß der Nenner beim 1ten P. B. = 1 ist. Der 2te Quotient ist der 1te Nenner im Kettenb. [illegible], [illegible] wird durch 1 multiplicirt [illegible] und es ist auch [illegible] zu addiren. Ist nun der K. B. $2+\frac{1}{3}$ so sind die bei den P. Brüchen $\frac{2}{1} + \frac{7}{3}$ [illegible] anzusehen ist.

Zu unserem Beispiele Seite 81 waren also die nach und nach erhaltenen Theile des Kettenbruchs

$$\frac{2939}{1270} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

d. erste Theil	———	$\frac{2}{1}$
der zweite Theil $2+\frac{1}{3}$ giebt	———	$\frac{7}{3}$
d. erst. 3te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}$	———	$\frac{37}{16}$
d. 1te bis 4te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$	———	$\frac{81}{35}$
d. 1te bis 5te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{6}}}}$	———	$\frac{523}{226}$
d. 1te bis 6te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{1}}}}}$	———	$\frac{604}{261}$
d. 1te bis 7te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}$	———	$\frac{2939}{1270}$

Der ist zuletzt der ursprünglich gegebene Bruch, wie er erhalten muß, ist sehr einleuchtend, indem [illegible] nämlich [illegible] alle seine Theile wieder zusammengenommen habe.

Daß dieses Verfahren aber sehr weitläufig ist erhellt aus dem vorstehenden, und kürzer wird man daher auch hier allgemein [illegible] vorgehen wie (hier Seite 83), wie aber noch kürzer [illegible]

zten Zeile gelangen, druckt man wie hier unter den Bruch die vorgeschrieben Art nach und nach, und ungerechnet ist möglich zu ... Rechtsein Bruch angezeigt. Ordnen ... man ... nachstehende Tabelle. Schreibe in einer Rubrik alle Quotienten ... die Zähler ... Nenner. Ist d. Bruch echt, so ... der Nenner 1 d. Zähler 0, ist er unecht so umgekehrt. Die ~~nächstfolgenden~~ Zähler findet man nun wenn man mit dem nächstfolgenden Quotienten ... multipl. und den unmittelbar darüber stehenden Zähler addirt. Eben so findet man die Nenner wenn ... derselbe beim Nenner thut. man sehe die Tabelle.

Um den 3ten P.B. zu bilden muß zu $\frac{7}{3+\frac{1}{5}}$ addirt werden das wäre aber falsch denn $\frac{1}{5}$ ist nicht zu $2+\frac{1}{3}$ also auch nicht zu $\frac{7}{3}$ sondern lediglich dem Nenner 3 im Bruche $\frac{1}{3}$ angehängt der Kettenbruch muß also in seiner vollständigen Form $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}=$ geschrieben und von hinten entwickelt werden (wie bei ... Brüchen) $=2+\frac{1}{\frac{16}{5}}=2+\frac{5}{16}=$ $=\frac{2\times16+5}{16}=\frac{37}{16}$. Hierbei kann man ihn nicht entwickeln denn 2 soll hier nicht zu $\frac{1}{3}$ sondern zu $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{16}$ addirt werden. Die Entwicklung des Nenners des 3ten P.B. sehen wir nun, als 5 der 3te Quot × mit 3 dem 2ten Nenner + 1 dem 1ten Nenner. Nimt man nun $\frac{7}{3+\frac{1}{5}}=\frac{35}{16}$ an, so ist der P.Bruch nicht richtig, kann aber durch addirung des vorhergehenden Zählers 2 ($\frac{2}{16}$) gutgemacht werden denn $\frac{35}{16}+\frac{2}{16}=\frac{37}{16}$

1270) 2939 (2
2540
399) 1270 (3
1197
73) 399 (5
365
34) 73 (2
68
5) 34 (6
30
4) 5 (1
4
1) 4 (4.
4
0

Quotient	Zähler 1	Nenner 0
2	2	1
3	7	3
5	37	16
2	81	35
6	523	226
1	604	261
4	2939	1270

Es wird also der 3te Quot mit dem 2ten Zähl ×, und der 1te Zähler addirt. Beim 4 P.B. ist es eben so $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}=2+\frac{1}{3+\frac{2}{11}}=2+\frac{11}{35}=\frac{81}{35}$ Nimt man aber $\frac{37}{16+\frac{1}{2}}$ an $=\frac{74}{33}$ so sind werden die Zähler und Nenner um $\frac{7}{3}$ respective von einander verschieden, aber warum trifft es so ein??? — Eine ausführliche Einsicht gewährt das Exempel p. 87 in allen Ziffern. — Ist der Bruch nicht unecht ist der erste P.B. 1 mit dem ersten Quot. als Nenner der Zähler braucht

als denn keine Hälfte gibt, und der Nenner soll zu [illegible] 1. welches mit dem Theil [illegible] und zum 2ten [illegible]

Es wird nicht am unrechten Ort seyn jetzt einmal die Größe jedes Partialbruchs zu untersuchen, um leichter damit man die Brüche der einander näher zu bringen hat, wird man jeden Decimalbruch gleichsetzen [illegible]

der Partialbruch	$\frac{2}{1}$	$= 2,000000$	zu klein
der Partialbruch	$\frac{7}{3}$	$= 2,333333$	zu groß
	$\frac{37}{16}$	$= 2,3125$	zu klein
	$\frac{81}{35}$	$= 2,314285$	zu groß
	$\frac{523}{226}$	$= 2,314159$	zu klein
	$\frac{604}{261}$	$= 2,314176$	zu groß
	$\frac{2939}{1270}$	$= 2,3141731 \ldots$	

Die Ursache davon ist leicht denn $\frac{2}{1}$ ist augenscheinlich zu klein weil ein Rest übrig geblieben ist, nimt man $\frac{1}{3}$ dazu, so ist $\frac{7}{3}$ zu groß, weil der Nenner 3 zu klein ist denn er soll hier noch etwas vergrößert werden. Fängt man hier $\frac{1}{5}$ an, so ist $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}$ zu klein, denn der $\frac{1}{5}$ nicht der Schlußbruch ist, sondern der Nenner 5 noch etwas vergrößert werden soll, so ist [illegible] zu groß. [illegible] Klammer [illegible] wenn man $\frac{1}{2}$ an so ist der Bruch $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$ zu groß, denn wenn hier mindestens $\frac{1}{5}$ zu sehr verkleinert, indem zu 2 noch etwas vergrößert werden soll u. s. f.

Wenn man diese u. Decimalbrüche [illegible] Partialbrüche betrachtet, so wird man finden daß sie zu nächst [illegible] Theile des Kettenbruchs enthalten, und desto mehr dem wahren Werth des Bruchs nähern, und daß sie bald zu klein bald zu groß gegen den Partialbruch sind. Der Nutzen der Partialbrüche, wenn man sie in Näherungsbrüche verwandelt, ist nun sehr wichtig, indem sie in der angewandten Mathematik [illegible] gebraucht werden z. B. in d. Mechanik.

angewendet sind. Da d. Verwandeln kann nie genau f. in Ziffern nur Brüche gegeben seyn + einem ungeheuren unbeschreiblich Decimalbruch, u. ich wünschte diesen Bruch ebenfalls auch in Ziffern od. in kleinen Zahlen auszudrücken, so ist es nothwendig daß ich den Bruch in Kettenbruch verwandle, u. wie dies schicklichst geschehen.

bis man an den letzten Bruch kommt, der doch Zahl hat vorspringende Glied ist.

Wenn man nun den obengesetzten ganz allgemeinen Bruch $\frac{A}{B}$ verwandelt, so wird man auch finden müssen daß die Operation wie bei den Zahlen macht daß der Bruch $\frac{A}{B} = C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F+\cfrac{1}{G}}}}$ ebenfalls sey,

woraus diese Tabelle abgeleitet werden kann.

$$C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F+\cfrac{1}{G}}}}$$

$$C+\frac{1}{D} = \frac{CD+1}{D} \quad \text{1ste B.}$$

$$C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E}} = C+\frac{E}{DE+1} = \frac{CDE+C+E}{DE+1} \quad \text{2te B.}$$

Quotient	Zähler	Nenner
	1	0
C	C	1
D	CD+1	D
E	CDE+E+C	ED+1.
F	CDEF+EF+CF+CD+1	DEF+F+D
G	CDEFG+EFG+CFG+CDG+G+ CDE+E+C	DEFG+FG+DG+ED+1.

$$C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F}}} = C+\cfrac{1}{D+\frac{F}{EF+1}} = C+\frac{EF+1}{DEF+D+F} = \frac{CDEF+CD+CF+EF+1}{DEF+D+F} = \text{3te B.}$$

Ob nun die Theorie richtig sey wird d. folgenden Beweis d. vollständigen dadurch werde.

Quot.	Zähler	Nenner
	1	0
C	C	1
D	CD+1	D
E	CDE+E+C	ED+1
F	CDEF+EF+CF+CD+1	EDF+F+D
G	CDEFG+EFG+CFG+CDG+G+CDE+E+C	EDFG+FG+DG+ED+1
⋮	⋮	⋮
(n-2) M	α	β
(n-1) N	γ	δ
(n) P	γP+α	δP+β
(n+1) Q	γPQ+αQ+γ	δPQ+βQ+δ

$$\frac{A}{B} = C + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{F + \cfrac{1}{G \ldots + \cfrac{1}{M + \cfrac{1}{N + \cfrac{1}{P + \cfrac{1}{Q}}}}}}}}$$

der Näherungsbruch von C an bis auf: $\frac{1}{M} = \frac{\alpha}{\beta}$

der Näherungsbruch v. C bis auf $\frac{1}{N} = \frac{\gamma}{\delta}$

so wird nach d. Tabelle der Bruch bis $\frac{1}{P}$ = seyn

$\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$ u. der bis $\frac{1}{Q} = \frac{\gamma PQ+\alpha Q+\gamma}{\delta PQ+\beta Q+\delta}$;

Ob nun dies auch denn der Fall ist muss bewiesen werden, wenn wir den Bruch wirklich aus d. Tabelle suchen u. den Partialbruch ableiten. dieses setze man in den n-ten Partialbruch, da durch den Kettenbruch d. P noch nicht erschöpft $\left(P+\frac{1}{Q}\right)$ statt P und man erhält.

$$\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta};\quad \frac{\gamma\left(P+\frac{1}{Q}\right)+\alpha}{\delta\left(P+\frac{1}{Q}\right)+\beta} = \frac{\gamma PQ+\gamma+\alpha Q}{\delta PQ+\delta+\beta Q}$$

welches dasselbe ist wie in der Tabelle, der also … den $(n+1)^{te}$ u. n^{te} Partialbruch aber so entsteht ist er der n^{te} und dem $(n-2)^{te}$ + $(n-1)^{te}$.

Nun frägt es sich aber welches ist denn der Unterschied zwischen zweyen auf einander folgenden Näherungsbrüchen? dies soll untersucht werden.

der n^{te} Partialbruch war $\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$

der $(n+1)^{te}$ ——— $\frac{\gamma PQ+\gamma+\alpha Q}{\delta PQ+\delta+\beta Q}$, sie untereinander … gebracht u. einer von andern abgezogen gibt:

$$\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}-\frac{Q(\gamma P+\alpha)+\gamma}{Q(\delta P+\beta)+\delta}=\frac{Q(\gamma P+\alpha)+\delta(\gamma P+\alpha)}{Q(\delta P+\beta)+\delta}=$$

$$\frac{Q(\delta P+\beta)(\gamma P+\alpha)+\delta(\gamma P+\alpha)-Q(\gamma P+\alpha)(\delta P+\beta)-\gamma(\delta P+\beta)}{(\delta P+\beta)\left[Q(\delta P+\beta)+\delta\right]}\quad \alpha\delta-\gamma\beta$$

$$=\frac{\delta(\gamma P+\alpha)-\gamma(\delta P+\beta)}{(\delta P+\beta)\left[Q(\delta P+\beta+\delta\right]}$$; der Unterschied zwischen $(n-1)^{te}$ u. n^{te} wird folgender seyn:

der $(n-1)^{te}$ Partialbruch war $\frac{\gamma}{\delta}$; der n^{te} war $\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$,

$$\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}=\frac{\gamma(\delta P+\beta)-\delta(\gamma P+\alpha)}{\delta(\delta P+\beta)};\quad \gamma\beta-\alpha\delta$$

Betrachten wir nun die Differenzen d. n^{te} u. $(n+1)^{te}$; … wie die diff. d. n^{te} u. $(n-1)^{te}$ Näherungsbruchs so … dieses kommt daher daß die kreuzweisen Producte in der Tabelle zu 4 von auswärts liegenden Gliedern nur um 1 von einander verschieden sind $(CD+1).1 = C.D\pm1$ $(CD+1)(ED+1)=(CDE+E+C)D\pm1$

… entsprechenden folgenden die Differenz zweier Brüche ist immer ein Bruch dessen Zähler = 1 und der Nenner immer größer wird dann … wenn die Tabelle S. 88 so ist der 2 P. B. entstanden durch wenn C × mit D und 1 addirte, … wenn man von $\frac{C}{}$ $\frac{CD+1}{D}$ ab so wird C … mit D multiplicirt, und also 1 zum Rest geben, der ± … kommt der 3te Part. B. ist entstanden daß wenn CD+1 mit E multiplicirt und C addirte, zieht man nun $\frac{CD+1}{D}-\frac{CDE+E+C}{ED+1}$ ab = so wird zwar CDE+E+C mit D multiplicirt, aber CD mit ED multiplicirt gibt die ersten Glieder CDE und DE, nun muß CD+E also noch 1 mal genommen werden dadurch fällt das 3te Glied CD weg und es bleibt wieder 1

Eben so verhält es sich … mit andern Differenzen

daß nun z.B. aus Primzahlen nicht daß die Zähler dieser Näherungsbrüche auch bei sich [illegible] gerade herausfolgt,
daß durch die Hinzufügung des einer weiteren Fortsetzung einander gleich sind,
jeder Vielfache verändert wird
im $C+\frac{1}{D+\frac{1}{E+\frac{1}{F}}}$ z.B. gleich $\frac{EF+1}{F}$ nicht nur mit dem Unterschiede daß sie abwechselnd entzu sehen. Dann ist gegengesetzte Zeichen haben.
F gerade und E ungerade, so wird
so wird EF gerade und EF+1 ungerade
ist F ungerade so wird wenn E gerade
ist; EF gerade aber EF+1 nicht
mit F divisibel. Oder der
[illegible] Grund ist der, weil
ist $a+\frac{1}{b}$ gewiß $\frac{ab+1}{b}$ also ist
so ist ab ein Vielfaches von
b, und muß durch 1 nothwendig
verändert werden. Geht man
nun weiter, so verändert sich
immer der Kettenbruch auf
$m+\frac{n}{o}=\frac{mo+n}{o}$ also z.B.
so ist klar daß $\frac{n}{o}$ nicht zu heben sey,
weil n selbst mit n kein Viel-
faches ist, da nun mo ein Vielfaches
bildet, so wird es durch + n
verändert. u.s.f.

Primzahlen

Allemal muß die Zähler bei 2 in Zahlen gegebenen aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche mit = 1 seyn, und nur bald + bald – zu nehmen, wenn man einen ungeraden Bruch von einem geraden (z.B. 2^2-3^2) oder umgekehrt (1^2-2^2) abzieht.

Die Nenner werden immer größer und daher fällt der Werth des Bruchs immer kleiner.

Kein Näherungsbruch kann aufgehoben werden, weil auch ihre Zähler u. Nenner nicht absolute Primzahlen sind, so sind sie doch unter sich. Siehe Parquet § 38. Zus. 3.

§ 59. Aufgabe.

Es sind zwey unter sich Primzahlen gegeben; man soll 2 um 1 verschiedene Brüche von ihnen machen.

Z.B. 8773 und 1530.

Auflösung. Man betrachte die Zahlen als Nenner

nächsten bruch und suche zu diesem noch einen, die Näherungsbrüche. die beiden nur letzten Zahlen sind als denn die gesuchten Zahlen. also.

$\frac{8773}{1530}$

1530) 8773 (5
7650
— 1123) 1530 (1
1123
— 407) 1123 (2
814
— 309) 407 (1
309
— 98) 309 (3
294
— 15) 98 (6
90
— 8) 15 (1
8
— 7) 8 (1
7
— 1) 7 (7
7
— 0.

Quot.	Zähler.	Nenner.
	1.	0
5	3	1
1	6	1
2	17	3
1	23	4
3	86	15
6	539	94
1	625	109
1	1164	203
7	8773	1503

Je zwei aneinander liegende Aufstellten geben 2 Producte die um 1 verschieden sind

$5\times 0 = 1\times 1 + 1$
$6\times 1 = 5\times 1 + 1$
$17\times 1 = 6\times 3 - 1$
$23\times 3 = 17\cdot 4 + 1$ etc

und

also hier ist $8773 \times 203 = 1530 \times 1164 - 1$
welches die Aufgabe verlangte.

Auf eine solche Art könnte man nun auch für die in decimalen ausgedrückte Verhältnißzahl $\pi = 3,14159265\ldots\ldots$ nächste Brüche sich machen indem man schreibt $\frac{314159265}{100000000}$ und hiezu die Näherungsbrüche suchte. Ausgerechnet:

```
  100000000 | 3
  31415926.5
  300000000
  14159265  | 7
  100000000
  99114855
  885145    | 15
  14159265
  885145
  5307815
  4425725
  882090    | 1
  885145
  882090
  3055      | 288
  882090
  6110
  27109
  24440
  26690
  24440
  2250      | 1
  3055
  2250
  ⋮
```

Quot	Zähler	Nenner	
	1	0	
3	3	1	
7	22	7	Archimedische
15	333	106	
1	355	113	Metius'sche
288	102573	32650	
1	102928	32763	
			u. s. w.

Auf diese Art hat man die bis jetzt bekannten 160 Dezimalstellen von π ist weit in Rechnung zu brauchen bemerkt daß die beiden 32 ziffrige Zahlen sind. also welche Unbequemlichkeit im Rechnen!

Nach P. VI Abschnitt. Seite 134.

Von der Rechnung mit Wurzelgrößen.

Cf. pag. 17.

Irrational heißt jede Größe mit einem Bruch-Exponent und $\sqrt{\ }$ Größe, hier aber nur eine solche Größe wie $B\sqrt[n]{a}$; wo B d. Coefficient der $\sqrt{\ }$ Größe genannt wird.

Gleichartig sind diej. die einerlei $\sqrt{\ }$ Exp. (d. einerlei Größe unter dem $\sqrt{\ }$ zeichen haben). als $c\sqrt[n]{a^r}$ und $d\sqrt[n]{a^r}$;

Ungleichartig $\sqrt[n]{a^x}$ und $\sqrt[m]{a^x}$;

Rationale Größen heißen allemal diejenigen deren Verhältniß zur Einheit vollständig ausgedrückt werden kann, sie mögen als Ganze oder als Brüche u. s. w. erscheinen.

Irrational heißen sie denn wenn das Verhältniß z. Einheit nicht ~~vollständig~~ ausgedrückt werden kann. Allemal also wenn ich $\sqrt{\ }$ brauche ist der Ausdruck, wenigstens d. Form nach irrational, z. B. $\sqrt{a}$, weil dies hier allgemein n möglich ist. Im einzelnen Fall aber ist es möglich daß es rational wird z. B. $a = 25$ $\sqrt{25} = 5$.

362.

Einen Ausdruck ganz irrational machen.

Man erhebe die Größe außer dem √ Zeichen also den Coefficient zur Potenz d. √ Exponents u. multiplicire mit ihr dann die Größe unter dem √ Zeichen.

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; $\frac{1}{3}a - x\sqrt[3]{bx} = \sqrt[3]{bx\left(\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{3}a^2x + ax^2 - x^3\right)}$

Umgekehrt:

$\sqrt[n]{a^{mn} b^{2n+3} c^{np+q}} = \sqrt[n]{a^{mn}} . \sqrt[n]{b^{2n+3}} . \sqrt[n]{c^{np+q}} =$

$= \sqrt[n]{a^{mn}} . \sqrt[n]{b^{2n}.b^3} . \sqrt[n]{c^{np}.c^q} = a^{\frac{mn}{n}} . b^{\frac{2n}{n}} . b^{\frac{3}{n}} . c^{\frac{np}{n}} . c^{\frac{q}{n}} =$

$= a^m . b^2 . c^p . b^{\frac{3}{n}} . c^{\frac{q}{n}} = a^m b^2 c^p \sqrt[n]{b^3 c^q}$;

$\sqrt[3]{a^5 b^{14} c^9 d^2} = ab^4c^3\sqrt[3]{a^2 b^2 d^2}$

Bei einem Ausdruck wie $\sqrt[2]{a^3x - 4a^2x^2 + 4ax^3}$ muß man die Größe erst in Factoren zerfällen, so daß ein vollständiges Quadrat heraus wird; also hier =

$\sqrt[2]{ax(a^2 - 4ax + 4x^2)} = (a - 2x)\sqrt[2]{ax}$.

Zahlen müssen wenn es geht eben so in Factoren zerlegt werden. z. B.

$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{8.128} = \sqrt[3]{8.8.16} = \sqrt[3]{8.8.8.2} =$

$\sqrt[3]{8^3.2} = 8\sqrt[3]{2}$;

$\sqrt{507} = \sqrt{3.169} = \sqrt{3.13^2} = 13\sqrt{3}$;

Auf diese Art kann man auch manchmal ein Paar un-
gleichnamig scheinende √ Größen gleichartig machen z.B.

$$a\sqrt[n]{b^n c} \times g\sqrt[n]{d^{2n}c} = ab\sqrt[n]{c} \times gd^2\sqrt[n]{c} = abd^2g\sqrt[n]{c^2}$$

$$5\sqrt[3]{2} \text{ u. } 4\sqrt[3]{16} = 5\sqrt[3]{2} \text{ und } 4\sqrt[3]{2.8} = 5\sqrt[3]{2} \text{ und } 8\sqrt[3]{2}.$$

163. Aufgabe

Eine √ Größe zu einer Potenz zu erheben.

$$(a\sqrt[m]{b})^n = a^n\sqrt[m]{b^n}\,;\quad (2\sqrt[3]{5})^2 = 2^2\sqrt[3]{25} = 4\sqrt[3]{25}.$$

Beweis: $a\sqrt[m]{b} = ab^{\frac{1}{m}}$ also $(a\sqrt[m]{b})^n = (ab^{\frac{1}{m}})^n = a^n b^{\frac{n}{m}}$
$= a^n\sqrt[m]{b^n}$;

Zusatz 1.

$$(a\sqrt[nr]{b})^n = a^n\sqrt[r]{b} \text{ denn } (a\sqrt[nr]{b})^n = a^n b^{\frac{n}{nr}} = a^n b^{\frac{1}{r}} = a^n\sqrt[r]{b}.$$

Cf. p. 19.

$$\text{IX. } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

denn $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[mn]{a}$

Zusatz 2.

$$(a\sqrt[3]{5})^3 = 5a^3\,;\quad (a\sqrt[n]{b})^n = a^n\sqrt[n]{b^n} = a^n b.$$

164. Aufgabe.

Die n^te √ aus einer √ Größe zu bestimmen:

$$\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m b}} = \sqrt[nm]{a^m b}\,;\quad \sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[6]{20}\,;$$

denn 1. ist $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{ab^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{m}{mn}} b^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^m b}$,

Zusatz I

Lassen sich Exponent des Koeffizient und d. Größe unter √ Zeichen
durch den auszuziehenden √ Exp. divid. so kann dies geschehen.

z.B. $\sqrt[3]{a^6\sqrt[5]{b^3}} = \sqrt[3]{a^6 b^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{3}{3.5}} = a^2 b^{\frac{1}{5}} = a^2\sqrt[5]{b}$,

welches durch unmittelbare Divis. d. Exponenten erhalten wurde.

Zusatz II.

Deshalb können wir auch bei √Größen den √Exponent u. den Exp. unter dem √Zeichen mit einerlei Zahl multipliciren od. dividiren also:

$$\sqrt[\frac{m}{r}]{a^{\frac{n}{r}}} = \sqrt[m]{a^n} \; ; \text{ und } \sqrt[m.r]{a^{n.r}} = \sqrt[m]{a^n} ;$$

X $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m.x]{a^{n.x}}$

§ 65. Aufgabe.

Eine √Größe $a\sqrt[n]{b}$ mit einer Größe A zu multipliciren ohne ihren Werth zu ändern;

XI $\sqrt[n]{a} = A\sqrt[n]{\frac{a}{A^n}}$

$$a\sqrt[n]{b} = aA\sqrt[n]{\frac{b}{A^n}} = \frac{aA}{A}\sqrt[n]{\frac{b}{1}} = a\sqrt[n]{b} ;$$

$$2\sqrt[3]{5} = 2.2\sqrt[3]{\frac{5}{8}} \; ; \quad \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}.3\sqrt{\frac{3}{45}} = 2\sqrt{\frac{1}{15}} ;$$

§ 66 Aufgabe.

√Größen, verschiedener √Exponenten in andere zu verwandeln welche einerlei √Exp. haben.

XII $\sqrt{b} + \sqrt[3]{d} = \sqrt[6]{b^3} + \sqrt[6]{d^2}$

$$a\sqrt{b} + c\sqrt[3]{d} = a\sqrt[6]{b^3} + c\sqrt[6]{d^2} ;$$

$$2\sqrt{5} - 3\sqrt[4]{7} = 2\sqrt[4]{25} - 3\sqrt[4]{7} ;$$

Zur Bestimmung eines gleichen √Expts mehrerer √Größen wählt man die ~~welche~~ kleinste Zahl in welcher alle Exp. enthalten sind.

z. B. $\sqrt{3} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{5} + \sqrt[12]{6} = \sqrt[12]{3^6} + \sqrt[12]{7^4} + \sqrt[12]{5^3} + \sqrt[12]{6}$;

u. s. w.

§ 67.

§67. Aufgabe

Addition und Subtraction.

Nur gleichartige Wurzelgrößen können addirt und subtrahirt werden, daher ist es suchen sie rational zu machen, sonst ist die Add. u. Subtr. nur angedeutet werden.

$3\sqrt{bc} - 8\sqrt[3]{a^2} + 5\sqrt[4]{cd^3} - 4\sqrt[3]{a^2} + 8\sqrt{bc} - 3\sqrt[4]{cd^3} - 6\sqrt[3]{a^2}$

$= 11\sqrt{bc} - 18\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[4]{cd^3};$

$\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} = \sqrt{4.6} + \sqrt{9.6} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6} = 4\sqrt{6};$

$3\sqrt{448} - 2\sqrt{432} + 5\sqrt{847} + \sqrt{63} - 8\sqrt{175} + \sqrt{20667} =$

$3\sqrt{64.7} - 2\sqrt{432} + 5\sqrt{121.7} + \sqrt{9.7} - 8\sqrt{25.7} + \sqrt{20667} =$

$3.8\sqrt{7} - 2\sqrt{144.3} + 5.11\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 40\sqrt{7} + \sqrt{6889.3} =$

$24\sqrt{7} - 24\sqrt{3} + 55\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 40\sqrt{7} + 83\sqrt{3} =$

$= 48\sqrt{7} + 59\sqrt{3}.$

Multiplication

$3a\sqrt[n]{b^p} \times 5b\sqrt[n]{c^v} = 15ab\sqrt[n]{b^p c^v};$

$4c\sqrt[m]{a^p} \times 3a\sqrt[n]{b^r} = 4c\sqrt[mn]{a^{pn}} \times 3a\sqrt[mn]{b^{rm}} = 12ac\sqrt[mn]{a^{pn} b^{rm}};$

$2a\sqrt[4]{b^3} \times 5c\sqrt[6]{a^5} = 2a\sqrt[12]{b^9} \times 5c\sqrt[12]{a^{10}} = 10ac\sqrt[12]{a^{10} b^9};$

$2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + \sqrt{2}$

$3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{5}$

$\left.\begin{array}{l} 6\sqrt[6]{3^5} - 12\sqrt[6]{5^3 3^2} + 3\sqrt[6]{3^2.2^3} \\ 4\sqrt[6]{3^3.5^2} - 8\sqrt[6]{5^5} + 2\sqrt[6]{2^3 5^2} \end{array}\right\} = 6\sqrt[6]{243} - 12\sqrt[6]{1125} + 3\sqrt[6]{72} + 4\sqrt[6]{675} - 8\sqrt[6]{3125} + 2\sqrt[6]{200};$

$3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

$4\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$

$12\sqrt{25} + 8\sqrt{15}$

$- 18\sqrt{15} - 12\sqrt{9}$

$24 - 10\sqrt{15};$

$a\sqrt{c} + b\sqrt{d}$

$e\sqrt{c} - f\sqrt{d}$

$ace + eb\sqrt{dc}$

$- af\sqrt{cd} - bdf.$

$ace - bdf + (be - af)\sqrt{cd};$

Nach der weitläuftigern Operation daß man die √ Größ-
die man multipliciren soll erst unter einerlei √ Exp-
bringt, so thut ihr recht, sie erst vor d. Operation
zu gebrochen Exponenten zu verwandeln und dann
zu multipliciren. z. E.

$$\frac{3a}{2b}\sqrt{\frac{cx}{a}} - \frac{2b}{5c}\sqrt[3]{\frac{a}{cx^2}} + a\sqrt[4]{\frac{c}{x^3}} \times \frac{2a}{b}\sqrt{\frac{cx}{a}} + 3b\sqrt[4]{\frac{cx}{b}} =$$

$$= \left.\begin{matrix}\frac{3}{2}ab^{-1}c^{\frac12}x^{\frac12}a^{-\frac12} - \frac{2}{5}a^{+\frac13}bc^{-1}c^{-\frac13}x^{-\frac23} + ac^{\frac14}x^{-\frac34} \\ 2ab^{-1}a^{-\frac12}c^{\frac12}x^{\frac12} + 3bb^{-\frac14}c^{\frac14}x^{\frac14}.\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{3}{2}a^{\frac12}b^{-1}c^{\frac12}x^{\frac12} - \frac{2}{5}a^{\frac13}bc^{-\frac43}x^{-\frac23} + ac^{\frac14}x^{-\frac34}$$
$$2a^{\frac12}b^{-1}c^{\frac12}x^{\frac12} + 3b^{\frac34}c^{\frac14}x^{\frac14}.$$

$$3ab^{-2}cx - \frac{4}{5}a^{\frac56}c^{-\frac56}x^{-\frac16} + 2a^{\frac32}b^{-1}c^{\frac34}x^{-\frac14}$$
$$+ \frac{9}{2}a^{\frac12}b^{-\frac14}c^{\frac34}x^{\frac34} - \frac{6}{5}a^{\frac13}b^{\frac74}c^{-\frac{13}{12}}x^{-\frac{5}{12}} + 3ab^{\frac34}c^{\frac12}x^{-\frac12} =$$

$$= \frac{3acx}{b^2} - \frac{4}{5}\sqrt[6]{\frac{a^5}{c^5x}} + \frac{2a}{b}\sqrt[4]{\frac{a^2c^3}{x}} + \frac{9}{2}\sqrt[4]{\frac{a^2c^3x^3}{b}}$$
$$- \frac{6b}{5c}\sqrt[12]{\frac{a^4b^9}{cx^5}} + 3a\sqrt[4]{\frac{b^3c^2}{x^2}};$$

Kommen wir hier beim Wiederherstellen der √ form
unächte brüche in den Exponenten vor, so werden
die ganzen Zahlen als Exponent d. Größe selbst
vor das √ zeichen geschrieben wie hier beim 3ten Glied
bei $a^{\frac32}$ das erst kommt unter d. √ Zeichen;

Division.

Auch hier wird man mit noch größerem Vortheile die √Zeichen durch gebrochene Exponenten erst wegschaffen, und so verfahren wie Parag. 169. — . der dividendus setzt.

$$\frac{6}{25x}\sqrt[6]{\frac{b^3y}{x^3z^3}}-\frac{9}{20}a\sqrt[6]{\frac{y}{x^2z^3}}-\frac{5}{4}a\sqrt[6]{\frac{x^4z^3}{y^3}}+1-\frac{4b}{25x^2\sqrt[3]{y}}+$$

$$+\frac{cd^2}{4a}\sqrt[6]{\frac{x^2}{y}}+\frac{2cd^2}{15a^2}\sqrt[6]{\frac{b^3}{x^5y}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{bz}{xy}}-\frac{cd^2}{5a^2}\sqrt[6]{\frac{y^2}{x^2z^3}}+\frac{9}{16}a^2\sqrt[3]{\frac{x}{y}};$$

der divisor $=\frac{3}{4}a\sqrt[6]{\frac{x}{y}}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{\frac{y^2}{x^3z^3}}+\frac{2}{5x}\sqrt[6]{\frac{b^3}{y}}=$

$$\frac{3}{4}a\,x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}}-\frac{3}{5}y^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}b^{\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-\frac{1}{6}};$$

der Dividendus $=\frac{6}{25}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^{+\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}}-\frac{9}{20}a\,x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}}-\frac{5}{4}a\,x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}+1-$

$$-\frac{4}{25}b\,x^{-2}y^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}a^{-1}cd^2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+\frac{2}{15}a^{-2}b^{\frac{1}{2}}cd^2x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{6}}-\frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{5}a^{-2}cd^2x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{2}}+\frac{9}{16}a^2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}};$$

der divisor und dividend nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$\frac{1}{6}\ -\frac{1}{2}\ -1$ im Divisor d. Exponent von x. also geordnet

im dividendus die Exp. von x.

$x\ -\frac{3}{2}\ -\frac{1}{3}\ +\frac{2}{3}+0\ -2\ +\frac{1}{3}\ -\frac{5}{6}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{3}\ +\frac{1}{3}$. auf Nenner 6 gebracht.

$-\frac{9}{6}-\frac{2}{6}+\frac{4}{6}+0-\frac{12}{6}+\frac{2}{6}-\frac{5}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{2}{6}$; geordnet.

$+\frac{4}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+0-\frac{2}{6}-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}-\frac{5}{6}-\frac{9}{6}-\frac{12}{6}$; und

100 FIEDLER

der ganze Dividend u. Divis. geordnet wird seyn

$$\tfrac{3}{4}ax^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}} - \tfrac{5}{3}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{5}b^{\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-\frac{1}{6}} \;\Big|\; -\tfrac{5}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{4}ax^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}} + \tfrac{1}{3}a^{-2}cd^{2}x^{\frac{1}{6}} - \tfrac{6}{15}b^{\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-\frac{1}{6}};$$

Dividend $= -\tfrac{5}{4}ax^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + \tfrac{9}{16}a^{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{4}a^{-1}cd^{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} + 1 - \tfrac{9}{20}ax^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{5}a^{-2}cd^{2}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{15}a^{-2}b^{\frac{1}{2}}cd^{2}x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{6}}$
$+ \tfrac{6}{25}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{4}{25}bx^{-2}y^{-\frac{1}{3}};$

$\mp\tfrac{5}{4}ax^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} \pm 1 \mp \tfrac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$

$\tfrac{9}{16}a^{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + \ldots$

$\pm\tfrac{9}{16}a^{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \mp \tfrac{9}{20}ax^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}} \pm \tfrac{6}{20}ab^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{3}}$

$\tfrac{1}{4}a^{-1}cd^{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} -$

$\pm\tfrac{1}{4}a^{-1}cd^{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} \mp \tfrac{1}{5}a^{-2}cd^{2}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{2}} \pm \tfrac{2}{15}a^{-2}b^{\frac{1}{2}}cd^{2}x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{6}}$

$-\tfrac{3}{10}ab^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{3}}$

$\mp\tfrac{3}{10}ab^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{3}} \pm \tfrac{6}{25}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}} \mp \tfrac{4}{25}bx^{-2}y^{-\frac{1}{3}}.$

0 0 0

dem Quotient die √ Zeichen gegeben $= \tfrac{3}{4}a\sqrt[6]{\tfrac{x}{y}} + \tfrac{cd^{2}}{3a^{2}}\sqrt[6]{x} - \tfrac{6}{15x}\sqrt[6]{\tfrac{b^{3}}{y}} - \tfrac{5}{3}\sqrt[6]{\tfrac{x^{3}z^{3}}{y^{3}}};$

Hier habe ich erst [illegible] Verbindungszeichen weil ein Product eines factors des Divisors und eines factors des Quot: zum Dividenden muss addirt werden [illegible] wird also mit umgekehrten Zeichen dem Dividenden abgezogen und später aufgehoben. Eben so hebt sich das +1 hier auf, weil zwey gleiche Factoren = +1 geben.

Sind die Größen unter den Wurzelzeichen Zahlen, so
und der ist schwierig oder unmöglich sein die Division
a. d. gewöhnliche Art zu verrichten, da bei der Mul-
tiplication ganze Theile verschwinden.

z. B. $\frac{41\sqrt{6} - 71\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 7\sqrt{6}}$

Man muß zuförderst den Divisor rational zu machen
suchen, und wo die Größe zweitheilig ist, kann ~~man~~
der Satz, daß das Product aus der Summe und Differenz
die Differenz d. Quadrate giebt, angewendet werden,
und man muß dann nur den Dividend mit derselben
Größe multipliciren.

$$\frac{(41\sqrt{6}-71\sqrt{3})(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})}{(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})} = \frac{615\sqrt{2} - 1065 + 1722 - 1491\sqrt{2}}{-219}$$

$$= \frac{657 - 876\sqrt{2}}{-219} = 4\sqrt{2} \cancel{+3}; = \underline{4\sqrt{2} - 3};$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

$$\frac{(41\sqrt{6}-71\sqrt{3}).(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})}{(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{205\sqrt{18} - 355\sqrt{9} + 284\sqrt{36} - 497\sqrt{18}}{(5\sqrt{3})^2 - (7\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{-292\sqrt{18} - 355.3 + 284.6}{25.3. - 49.6}$$

$$= \frac{-292\sqrt{2} - 355 + 284.2}{25 - 49.2} \quad 568$$

$$= \frac{-292\sqrt{2} + 213}{-73} = \frac{-4\sqrt{2}+3}{-1}$$

$$= \underline{4\sqrt{2} - 3}$$

Ist der Divisor eine 3namige Größe so ist die
Operation schwieriger und muß zweimal wiederholt
werden. z. B.

$$\frac{30 + 4\sqrt{5} + 150\sqrt{2} - 34\sqrt{6} + 10\sqrt{10} - 40\sqrt{12} - 6\sqrt{60}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}.}$$

Um den Divisor rational zu machen multiplicirt
man ihn mit sich selbst kehrt aber 2 Zeichen um

$$\begin{array}{l} 4+3-2 \\ 4-3+2 \\ \hline 16+12-8 \\ \quad -12-9+6 \\ \qquad +8+6-4 \end{array}$$

5
3

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ a-b+c \\ \hline a^2+ab-ac \\ \quad -ab-b^2+bc \\ \qquad +ac+bc-c^2 \\ \hline a^2-b^2+2bc-c^2 \end{array}$$

Den ersten muß man immer ungeändert lassen.

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-8\sqrt{6} \\ 2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+8\sqrt{6} \\ \hline 4\sqrt{25}+6\sqrt{10}-16\sqrt{30} = 20+6\sqrt{10}-16\sqrt{30} \\ -6\sqrt{10}-9\sqrt{4}+24\sqrt{12} = -6\sqrt{10}-18+48\sqrt{3} \\ +16\sqrt{30}+24\sqrt{12}-64\sqrt{36}. = 16\sqrt{30}+48\sqrt{3}-384 \\ \hline 96\sqrt{3}-382. \qquad\qquad 96\sqrt{3}-382 \end{array}$$

Mit diesem jetzt erhaltenen zweitheiligen Divisor verfahre man nun wie vorhin.

$$\frac{(30+4\sqrt{5}+150\sqrt{2}-34\sqrt{6}+10\sqrt{10}-80\sqrt{3}-12\sqrt{15})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+8\sqrt{6})}{96\sqrt{3}-382.}$$

$$=\frac{(30+4\sqrt{5}\ldots\ldots\ldots.12\sqrt{15})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+8\sqrt{6})(96\sqrt{3}+382)}{(96\sqrt{3}-382)(96\sqrt{3}+382)}$$

$$=\frac{(2484\sqrt{3}-2492-1910\sqrt{2}+480\sqrt{6})(96\sqrt{3}+382)}{-118276}$$

$$=\frac{709656\sqrt{3}-236552-591380\sqrt{2}}{-118276.}$$

$$=\frac{6\sqrt{3}-2-5\sqrt{2}}{-1}=\underline{2+5\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$$

Imaginaere Größen

§. 70. 77.

Jede gerade Potenz einer Größe +a oder −a ist immer positiv; jede ungerade Potenz hingegen + od. − je nachdem die Größe aus der sie entstanden + od. − war

$$\begin{array}{ll} +a & -a \\ +a & -a \\ \hline +a^2 & +a^2 \\ +a & -a \\ \hline +a^3 & -a^3 \\ +a & -a \\ \hline +a^4 & +a^4 \end{array}$$

Daher kann also eine Größe a welche die $\sqrt[2n]{A}$ ist entweder ±a seyn; welches von beiden Merkmalen übrigens zu nehmen sey, hängt von Umständen ab und die Unmöglichkeit muß hierin entscheiden.

Ein Ausdruck wie $\sqrt[2n]{-A}$ ist eine unmögliche (imaginaire, eingebildete) Größe.

Das Unmögliche theilt man in absolutes und bedingtes Unmögliches eintheilen. Das erstere ist ein Gegenstand der Philosophie. Die bedingte Unmöglichkeit liegt aber darin: Eine negative Größe an sich ist etwas mögliches. Das √ ausziehen ist auch etwas mögliches an sich, aber nur dann wenn beides zusammengesetzt wird es unmöglich. (~~Un~~bedingt

(verrechte)

unmöglich sind sie auch nach dem Grunde nach, weil wenn ~~für~~ 2 solcher Größen mit einander multiplicirt werden das Produkt würde möglich werden. Man ist also hierbei nicht über das Wort zu richten sondern über die Sache hierbei aufzuhalten.

In d. Regel reduzirt man alle unmöglichen Größen auf den Ausdruck $\sqrt{-1}$, und dies ist in der Anwendung oft von großer Wichtigkeit.

$$\sqrt[2n]{-A} = \sqrt[n]{\sqrt[2]{-A}} = \left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = -A^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{-A}$$

auf $\sqrt{-1}$ reduzirt:

$$\sqrt[2n]{-A} = \sqrt[2n]{A\cdot -1} = \sqrt[2n]{A}\cdot\sqrt[2n]{-1};$$

$$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81\cdot -1} = \sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{-1} = 3\sqrt[4]{-1};$$

In der Anwendung kommen in d. Regel nicht höhere Wurzeln vor als Quadrat Wurzeln.

$$\sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}; \quad b\sqrt{-c} = b\sqrt{c}\cdot\sqrt{-1};$$

§ 174 <u>Addition</u> u. <u>Subtraction</u> unmöglicher Größen ist ganz so wie die der gewöhnlichen $\sqrt{}$ Größen.

$$7\sqrt{-4} + 8\sqrt{-25} - 6\sqrt{-9} = 14\sqrt{-1} + 40\sqrt{-1} - 18\sqrt{-1} = 36\sqrt{-}$$

Multiplication unmöglicher Größen

Diese ist schwieriger, und bei ihr bemerkt man hauptsächlich auf die Mittheilung der einzelnen Zeichen, wie entsteht wenn $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$ × wird.

Eine jede Größe kann ich auf mancherlei Art darstellen z. B. $\sqrt{3} = 1,7320508$, beide sind Schreibformen nur daß bei der in Decimalen ausgedrückten eine Annäherung gestattet wird.

Nun entsteht die Frage wie soll ich eine jede Größe in 2 = Factoren zerlegen. dies geschieht dadurch z.B. $3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.

Nach diesem Satz angewandt -1 in 2 = Factoren zerlegt wird es sein $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ ~~und~~ -1.

Soll nun eine mögliche Größe mit einer unmöglichen × zu werden, so bleibt das Product unmöglich und die Zeichen richtet sich nach dem Zeichen der Factoren. z. B.

$$+b\sqrt{-a} \times +\sqrt{c} = b\sqrt{-ac} = b\sqrt{ac} \cdot \sqrt{-1};$$

Unmögliche Größen mit unmöglichen × zu, so ~~mult~~iplicirt man d. Größen unter dem $\sqrt{}$ Zeichen wie gewöhnlich, verwandelt aber dafür das Vorzeichen

welches eigentlich vermöge der Vorzeichen der Factoren statt finden sollte und entgegengesetzte. z. B.

$a\sqrt{-b} \cdot c\sqrt{-d} = a\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\cdot c\sqrt{d}\cdot\sqrt{-1} =$

$= ac\sqrt{b}\cdot\sqrt{d}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = ac\sqrt{bd}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} =$

$= ac\sqrt{bd} \times -1 = -ac\sqrt{bd}.$

$a\sqrt{-b} \cdot -c\sqrt{-d} = a\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1} \times -c\sqrt{d}\cdot\sqrt{-1} =$

$= -ac\sqrt{bd}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -ac\sqrt{bd}\cdot -1 =$

$= +ac\sqrt{bd}.$

$5\sqrt{-3} \cdot -4\sqrt{-2} = 20\sqrt{6}.$ denn es ist

$5\sqrt{-3} \cdot -4\sqrt{-2} = 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} \times -4\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} =$

$= -20\sqrt{6}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -20\sqrt{6} \times -1 = 20\sqrt{6}.$

Gemischte Multiplication:

$2\sqrt{3} - 4\sqrt{-2} - 5\sqrt{-3}$

$3\sqrt{3} + 2\sqrt{-2} - 3\sqrt{-5}$

$18 - 12\sqrt{-6} - 45\sqrt{-1}$

$4\sqrt{-6} + 16 + 10\sqrt{6}$

$-6\sqrt{-15} - 12\sqrt{10} - 15\sqrt{15}.$

$= 34 - 8\sqrt{-6} - 45\sqrt{-1} + 10\sqrt{6} - 6\sqrt{-15} - 12\sqrt{10} - 15\sqrt{15}$

Divis

Division unmöglicher Größen.

Wenn man hier wie bei der andern Division von der Multiplikation rückwärts schließen wollte, so würde man unrecht thun, indem man diesen gewöhnlichen Wege nicht stark kann; denn auch hier würden gewisse Schwierigkeiten eintreten, denn da bei der Multiplikation 2er unmöglichen Größen die Zeichen änderten, so wird es b. d. Division dieselbe größere Aufmerksamkeit anwenden müssen.

Die einzige und größte Schwierigkeit ist doch ob eine unmögliche Größe durch eine unmögliche dividirt werden solle.

Ein Hauptkunstgriff dessen es sich hiebei bedienen kann ist der, daß man die Größen immer mit $\sqrt{-1}$ verbindet.

$$\frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}.\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}}{+\sqrt{a}} = +\sqrt{\frac{ab}{a}} = +\sqrt{b};$$

$$\frac{+\sqrt{-ab}}{-\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{-\sqrt{a}.\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{ab}{a}} = -\sqrt{b};$$

also:

$$\frac{+\sqrt{-ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \pm\sqrt{b}; \quad \text{oder:} \quad \frac{-\sqrt{-ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \mp\sqrt{b};$$

Die Hauptsache ist den Divisor oder Nenner rational zu machen. Werden nun unmögliche Gr. durch unmögliche dividirt, so läßt sich $\sqrt{-1}$ wegschneiden und die Zähler und Nenner heben. Wird nun mögliche Gr. durch eine unmögl. dividirt, so schiebt man im Nenner $\sqrt{-1}$ ein, multiplicirt beide Theile mit $\sqrt{-1}$, so wird im Nenner -1. welches das Zeichen des Bruches ins entgegengesetzte verwandelt —
Ist das Unmögliche nicht dem Nenner eigenthümlich, so muß besonders bei Zahlenbeispielen der Nenner noch rational gemacht werden, wenn man multiplicirt ihn durch sich selbst mit Wurzelzeichen, das Zeichen außer einem, mit oben.

d. h. also unmögliche Größen durch unmögliche dividirt, bestimmt man das Vorzeichen als ob die Zeichen unter dem √ Zeichen nach gewöhnlichen Regeln.

Mögliche durch unmögliche Größe zu dividiren dies ist schwieriger und hat besondere Hinsicht zu achten:

I. $$\frac{+\sqrt{ab}}{+\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}}{+\sqrt{a}.\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}.-1} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{-\sqrt{a}} =$$

$$= -\sqrt{-1}\sqrt{\frac{ab}{a}} = -\sqrt{-1}.\sqrt{b} = -\sqrt{-b};$$

II. $$\frac{+\sqrt{ab}}{-\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}.\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{-\sqrt{a}.-1} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}}$$

$$= +\sqrt{-1}\sqrt{\frac{ab}{a}} = +\sqrt{-1}\sqrt{b} = +\sqrt{-b};$$

diese Fälle combinirt:

$$\frac{+\sqrt{ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \mp\sqrt{-b}; \text{ und } \frac{-\sqrt{ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \pm\sqrt{-b};$$

Eine Regel würde also sagen:

Wenn eine mögliche durch unmögliche Größe dividirt werden soll, so dividirt man die Größen unter dem √ Zeichen nach gewöhnlichen Regeln, gebe dem Quotient aber ein den gewöhnlichen Regeln entgegengesetztes Vorzeichen.

Sonderbar ist es daß viele anerkannt große Mathematiker hierin ungeheure Fehler begangen haben; so z. B. einmahl Langsdorfs Analysis wollen Fehler bei den unmöglichen Größen.

Zahlen-Beyspiele.

$$\frac{-\sqrt{15}}{+\sqrt{-3}} = +\sqrt{-5}\,; \quad \frac{+\sqrt{32}}{+\sqrt{-8}} = -\sqrt{-4} = -2\sqrt{-1}\,;$$

$$\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{-10}}{-\sqrt{-2}} = \frac{2\sqrt{8}}{-\sqrt{-2}} + \frac{-\sqrt{-10}}{-\sqrt{-2}} = +2\sqrt{-4} + +\sqrt{5}, =$$

$= \underline{4\sqrt{-1}+\sqrt{5}}$; = den Quotient; wollte man die Probe machen so steht.

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{-1}+\sqrt{5} \\ -\sqrt{-2} \\ \hline +4\sqrt{2} - \sqrt{-10} = \underline{2\sqrt{8}-\sqrt{-10}}\,; \end{array}$$

Bei einem Beyspiele wie unten $\frac{14}{4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}}$ sucht man den Nenner rational zu machen, indem man sonst nichts anfangen kann.

$$\frac{14}{4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}} = \frac{14(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})}{(4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}).(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})} = \text{Differenz d. Quadrate}$$

$$= \frac{14(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})}{-48+20} = \frac{14(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})}{-28} = \frac{4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5}}{-2}$$

$$= \underline{-2\sqrt{-3}-\sqrt{-5}}\,;$$

Seite 150 § 72.

Alle graden Potenzen unmöglicher √ wie √−a sind mögliche Größen, alle ungeraden dagegen unmögliche Größen.

$$(\sqrt{-a})^{2n} = ((\sqrt{-a})^2)^n = (-a)^n = \text{einer möglichen Gr.}$$

$$(\sqrt{-a})^{2n+1} = (\sqrt{-a})^{2n} \cdot (\sqrt{-a})^1 = (-a)^n \cdot \sqrt{-a} = \text{unmöglich}$$

$$(\sqrt{-5})^6 = (\sqrt{-5})^{2\cdot 3} = (-5)^3 = -125;$$

$$(\sqrt{-5})^8 = (\sqrt{-5})^{2\cdot 4} = (-5)^4 = +625;$$

§ 73. Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ der sich nicht in einen ganzen Zahl bringen läßt, irgend zu einer Potenz erhoben wird, so ist sie allemal ein Bruch derselben Art.

Der Verfasser spricht hier nur von einem ächten Bruch weil von dem ächten schon früher es bewiesen worden ist. also für $a > b$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n\text{mal}} = \frac{a^n}{b^n}$$

. Da hier Zähler aus dem Produkt von a.a.a.. und d. Nenner d. Produkt von b.bb.. besteht, so erhellt daß sie als Faktoren einzeln keinen gemeinschaftlichen Theiler hatten, sie auch in diesen Produkten

keinen Theiler haben können.

Allgemeiner könnte man den Beweis auch noch so führen: da,

$\left(\frac{a}{b}\right)$ ist $a > b$ und man denke sich dasselbe a zerlegt,

gesetzt auch $nb + c = a$. so ist: $b > c$ und: unter der Bedingung daß $\frac{a}{b} = n + \frac{c}{b}$ ist $a = bn + c$ und $b > c$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{nb+c}{b}\right)^2 = \left(n + \frac{c}{b}\right)^2 = n^2 + \frac{2nc}{b} + \frac{c^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(n + \frac{c}{b}\right)^3 = n^3 + \frac{3n^2c}{b} + \frac{3nc^2}{b^2} + \frac{c^3}{b^3} \text{ u.s.w.}$$

In diesen Fällen wäre es nun möglich daß die ersten Glieder in diesen erhabenen Potenzen durch b theilbar wären, indessen da sie immer noch zum letzten Gliede eine Potenz eines echten Bruchs $\frac{c^2}{b^2}$ u. $\frac{c^3}{b^3}$ .... haben so ist das Ganze also nicht theilbar.

Auch wenn die Voraussetzung nicht gemacht ist daß $\frac{a}{b}$ auf die kleinste Benennung reducirt sey so ist der Satz gültig, denn alsdann läßt er sich reduziren. z.B.

$$\left(\frac{na}{nb}\right)^m = \frac{\overbrace{na \cdot na \ldots na}^{m \text{ mal}}}{nb \cdot nb \ldots nb} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$ weil n überall vorkommt und $\frac{a}{b}$ als Bruch nur allein übrig bleibt wenn n weggeschafft ist.

Wenn man auch einer Größe A die n^{te} √ geben soll $\sqrt[n]{A}$ so können 3 Fälle statt finden. die √, a kann nämlich so beschaffen seyn daß

$a^n = A$; $a^n > A$; und $(a-1)^n < A$ ist;

z.B. $\sqrt{10} > 3$, und $\sqrt{10} < 4$.

Es kann der Fall daß $\sqrt[n]{A} > a$ und $\sqrt[n]{A} < (a+1)$ ist so ist die $\sqrt[n]{A} = a +$ einem ächten Bruch; und daher ist es klar daß nur bei Größen u. Zahlen wenn sie schon vollständige dignitäten sind die √ ausgezogen werden kann, und daß a + Bruch, nie die vollständige Größe A geben kann, wenn es auch im ersten Augenblick so scheint.

$\sqrt[4]{112} = 3 + \frac{a}{a+b}$ dieser Bruch müßte nun die Eigenschaft haben multiplicirt in die 3te Potenz erhoben die Zahl 112 wieder hervorzubringen. dies ist ab. und widersprechend u. unmöglich, und deshalb kann man schließen daß nie eine unvollständige dignität eine wahre Wurzel haben kann.

Das ganze will nur den kleinern Satz darthun, daß sich aus einer unvollständigen Potenz, irrationale Größen entstehen. Die entstehen aber auch bei der Division, wenn man diese auf Art der Decimalbrüche verrichtet z.B. $\frac{1}{3} = 0,333....$

174. Erklärungen. Irrationale und Rationale Größen

ßen.

Eine Irrationalzahl ist diejenige, welche sich weder durch die Einheit unmittelbar noch durch Theile der Einheit bestimmen läßt. Findet aber eine solche Bestimmung zur Einheit statt wenn auch nicht nach jeder Art der Theilung oder Bestimmung so heißt die Zahl rational.

z.B. a b ——————— d z.B. $ab = \frac{1}{6} ad$ ist rational.

$8 xy = \frac{1}{3} xy$ ist eine rationale Zahl. will ich den da $\frac{1}{3} xy$ in 10, 100tel xy theilen so ist das vollständig nicht möglich denn es ist $\frac{1}{3} xy = 0,3333 \ldots xy$;

Eben so ist $\sqrt[4]{112} = 3 + \frac{a}{a+b}$ eine irrationale Zahl weil der ächte Bruch [illegible] im Bruch ist die Zahl 112 [illegible] wieder hervorzubringen.

Das Wort rational und irrational begreift schlechterdings nur das Einheit Verhältniß, ob es sich genau oder nicht genau darstellen läßt.

Ein algebraischer Ausdruck kann irrational seyn, für die Anwendung aber rational gemacht werden. z.B. $\sqrt[4]{a}$ ist irrational; bei $a = 81$ so ist $\sqrt[4]{81} = 3$ = rational; Allen Buchstaben Aus-

dieses ist nicht zu verstehen $3 + \frac{a}{a+b}$ ist eine rationelle Zahl an sich, allein weil $\sqrt[4]{}$ von 112 herauskommt ist sie irrational denn $\left(3 + \frac{a}{a+b}\right)^4$ giebt nicht 112 und es läßt sich $\sqrt[4]{112}$ gar nicht genau angeben

Ausdrücke sind daher irrational zu nennen so lange sie noch ein √ Zeichen [illegible] enthalten

$\sqrt[2]{a^{3n}}$ = irrat. $\sqrt[2]{a^{2n}} = a^n$ = rational.

Wenn in der Anwendung aus einer irrationalen Zahl die √ ausziehen sollen, so thun wir dies immer in Decimalstellen, weil dies am bequemsten ist; nun fragt es sich aber, ob nicht ein anderer Bruch der Decimalbruch ist die √ vielleicht vollständig [illegible] drücke? Nein! nur den nächstgrößten.

Oft ist es aber bequemer gewöhnliche Brüche zu suchen, die

z. B. $\sqrt{3} = 1{,}7320508 = \frac{17320508}{10000000}$

```
  10000000 |
  17320508 | 1
  10000000
   7320508 | 1
  10000000
   7320508
   2679492 | 2
   7320508
   5358984
   1961524 | 1
   2679492
   1961524
    717968 | 2
   1961524
   1435936
    525588 | 1
    717968
    525588
    192380 | 2
    525588
    384760
    140828 | 1
    192380
    140828
```

Quot.	Zähler	Nenner
	1.	0.
1	1	1
1	2	1
2	5	3
1	7	4
2	19	11
1	26	15
2	71	41
1	97	56

$\sqrt{3} > 1$
< 2
$> \frac{5}{3}$
$< \frac{7}{4}$
$> \frac{19}{11}$
$< \frac{26}{15}$
$> \frac{71}{41}$
$< \frac{97}{56}$

aus diesen Brüchen kann ich nun immer den schicklichsten wählen z. B. $\frac{7}{4} = 1{,}75$;

375. Lehrsatz.

Jede grade Potenz einer Irrationalgröße $\sqrt{a}$ ist rational, jede ungrade irrational:

$$(\sqrt{a})^{2n} = ((\sqrt{a})^2)^n = a^n = \text{rational};$$

$$(\sqrt{a})^{2n+1} = (\sqrt{a})^{2n} \cdot (\sqrt{a})^1 = a^n \cdot \sqrt{a} = \text{irrational};$$

Bedingungen können hier statt finden, wo z. B. $\sqrt[3]{a}$ durch eine ungrade √Erhebung rational wird. $(\sqrt[3]{a})^{3n} = a^n$; überhaupt also wird jeder irrationale Ausdruck rational durch eine Potenzirung wenn d. Exp. des √zeichens in dem Exp. d. Dignität, ganz od. als Faktor enthalten ist.

VII Abschnitt.

Der Binomische Lehrsatz.

Seite 154.

Der Vf. stellt hier das [illegible] praktische auf, das Theoretische des Lehrsatzes oder der Beweis kommt erst im folgenden Abschnitt.

Zum weiteren Fortkommen in der Analysis ist er höchst wichtig.

Binom heißt eine 2theilige Größe, und in der Anwendung kommen nur 2theilige Größen selten 3 oder mehrtheilige vor. Was übrigens von 2 theiligen Größen gilt läßt sich auch sehr leicht auf Trinomen anwenden.

Wenn man $(a+b)$ nach und nach auf Potenzen erhebt, so ist:

$(a+b)^1 = a+b;$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6;$

$\frac{6}{1} \quad \frac{6.5}{1.2} \quad \frac{6.5.4}{1.2.3} \quad \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} \quad \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}$

$\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}$

Wenn man diese genannten Potenzen betrachtet,
so wird man bald finden daß nicht allein bei ihren
litteralischen Quantitäten sondern auch bei ihren Coefficient
eine gewisse Ordnung oder Gesetz der Fortschreitung
statt finden.

Die litteralischen Quantitäten betreffend:

1.) Sie sind sämtlich Combinationen von den beiden Wurzeln
a u. b, denn auch von a und b in einer Potenz
erhoben, im 1ten u. letzten Glied allein vorkommt
so kann man die fehlende Wurzel zu d. 0ten Potenz
=1 als Factor denken.

2.) Jede Potenz fängt mit dem ersten Theil
der Wurzel zu der verlangten Potenz erhoben an, als
das Binom erhoben werden soll und nimmt mit
der Potenz immer um 1 fallend: a^0; entgegengesetzt fängt vom ersten Glied die 2te Wurzel
b^0 an u. nimmt mit b zu der höchsten Potenz wie
der Exp. d. Binoms anzeigt ebenfalls um 1 steigend.
Aus 2 folgt nun daß da die beiden Wurzeln mit
stets um 1 fallenden u. steigenden Exponenten
versehen sind daß:

3tens. daß die Exponenten eines jeden Gliedes als

Binoms ihrer Summe nach den Exponenten = seyn müssten, weil dem das Binom erhoben werden soll. Eben so folgt:

4tens daß die Exponenten der Glieder die von beiden Seiten = weit nach der Mitte zu stehen, von a u. b, entgegengesetzt einander gleich seyn müssen.

5/ da nun a sowohl als b von der höchsten Potenz d. Binoms um 1 fallend bis 0 verbunden, so muß nothwendig die Anzahl d. Glieder um 1 größer seyn, als der Exponent d. Binoms für sich allein hat.

Die Coefficienten.

Ihre Rechtschreibung Entdeckung verdanken wir eigentlich dem Zufall, wiewohl man glaubt daß Newton sie entdeckt haben soll, deshalb nennt man auch den Binomischen Lehrsatz den Newtonischen Lehrsatz. Wahrscheinlich war er aber nur der Erfinder sondern nur derjenige der zuerst einen fruchtbaren Gebrauch von ihm machte.

Wenn man die Coefficienten betrachtet so findet man leicht und ihnen verschiedene Gesetze ihrer Fortschreitung unterscheiden. z.B. folgende:

1tens wenn man die Coefficienten die nachstehenden Potenzen

-

unmittelbar aus der vorhergehenden entwickelt indem man durch Addition des 2te und 3te Glied und dann Zusammen zählen, des 2te + 1te u 3 + 2te Glied der vorhergeh. Potenz erhält. z.B.

(1te Potenz) Coeffizient. 1 + 1.
2te Pot — 1 + 2 + 1.
3te Potenz — 1 + 3 + 3 + 1
4te Pot — 1 + 4 + 6 + 4 + 1
5te P — 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1

Das 1te und letzte Coeffizient bleibt nur 1.

Das Gesetz wird aber für die Anwendung nicht bequem seyn indem man die nte ~~Glied~~ Potenz nur dann erhalten würde wenn man schon die (n-1) Potenzen gemacht hätte.

Allein beim Bin. Lehrsatz kommt es darauf an eine Entwickelung an, daß man jede nte Potenz unabhängig von jeder vorhergehenden finden kann, ~~dies~~ Ein solches entdeckt man wenn man ~~als Factoren~~ die Exponenten von a neben einander als Zähler, u die von b neben einander als Nenner in ihrer Reihefolge schreibt: also hier bei der 3te Potenz z.B. Und die Nenner gesetzt kommt b^0 erst im 2te Glied vor und deshalb zeigt man nur halbseitig

$$\frac{3.2.1.0}{0.1.2.3} = \frac{3.2.1}{1.2.3}$$

Diese Annahme braucht der An-
fänger bei Bestimmung der Coef-
zien.

$\frac{3.2.1}{1.2\,3}$

das eigentlich 2te Glied einer 2 theiligen
Größe das 1te Glied zu nennen. Da doch aber
das wirkliche erste Glied immer den Coeffizient 1 hat.
Nach dieser Voraussetzung kann man nun leicht die
Bestimmung der Coeffizienten vornehmen, und
zwar man streicht in diesem so formirten Bruche, von
der Rechten zur Linken so viel ~~Zahlen~~ Factoren
oben und unten ab als die Zahl des Gliedes
Einheiten hat, zu welchem man den Coeffizient
sucht. z.B. vom Cubus des erste Glied

$\frac{3.\,|\,2.1}{1.\,|\,2\,3} = \frac{3}{1} = 3.$

2te Glied $\frac{3.2\,|\,1}{1.2\,|\,3} = \frac{3.2}{1.2} = \frac{3}{1} = 3.$

In d. 5te Potenz.

$\frac{5.4\,3.2.1}{1.2\,3\,4\,5}$.

das 1te Glied $= \frac{5}{1} = 5$

d 2te Glied. $= \frac{5.4}{1.2} = \frac{5.2}{1} = 10.$

d 3te Glied $= \frac{5.4.3}{1.2.3} = \frac{5.2}{1} = 10.$

d 4te Gl. $= \frac{5.4.3\,2}{1\,2\,3\,4} = \frac{5}{1} = 5.$ ..

d 5te Glied. $= \frac{5.4.3\,2\,1}{1.2\,3\,4\,5} = 1.$

Um nun diese Rechnung die Anbringung zu
einer allgemeinen Entwickelung d. Potenz

und kleinere Zahlen bekommen wird man z. B.
$(a+b)^5$ so schreiben.

$$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1}a^{5-1}b^1 + \frac{5.4}{1.2}a^{5-2}b^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}a^{5-3}b^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}a^{5-4}b^5 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}a^{5-5}b^5;$$

Wollte man nun die m^{te} Potenz von $(a+b)$ suchen so würde man nach obigem Gesetzen statt $5 = m$ setzen. und ist es die Frage wie wird das r^{te} Glied der Potenz aussehen.

So wird es obigen Gründen im litteralischen Produkt b^r und also a^{m-r} haben. Zum Coefficient wird es im Nenner $1 2 3 \ldots. r$ haben im Zähler dagegen $m . m-1 . m-2 \ldots. m-(r-1)$; und hat also r^{te} ~~Glieder~~ bis ~~[illegible]~~ vor der Stelle des Glieds angezeigt.

(es muß dabei angemerkt werden, dass das 2te Glied der Reihe das 1te ist, wie p 120 oben gesagt worden, sonst ist im jedem Glied b^{r-1} $a^{m-(r-1)}$ der Zähler des Coeff. $m.(m-1)\ldots.(m-[r-2])$ der Nenner $1.2\ldots.(r-1)$)

also allgemein

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2.}.a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2\ldots m-3}{1.2\ldots.4}a^{m-4}b^4 + \ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots(m-(r-4)).(m-(r-3)).(m-(r-2))}{1.2.3.\ldots\ldots(r-3).(r-2).(r-1)}a^{m-(r-1)}b^{(r-1)} +$$ das r^{te} Glied

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots(m-(r-3)).(m-(r-2)).(m-(r-1))}{1.2.3.\ldots\ldots(r-1).r}a^{m-r}b^r +$$ das $(r+1)^{te}$ Glied

$$+ \frac{m.m-1.m-2.\ldots.(m-(r-2)).(m-(r-1)).(m-r)}{1.2.3.\ldots(r-1).r.(r+1)}a^{(m-(r+1))}b^{r+1} + \ldots.$$ das $(r+2)^{te}$ Glied

Nun kann sich nun die Frage aufwerfen: wie kann man jedes gegebene Glied, unmittelbar

Zu Nr 5 Seite 162 aus seinem vorhergehenden bilden?

Deshalb vergleiche man das r^{te} Glied mit dem $(r+1)^{ten}$.

das r^{te} Glied ist $= \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots(m-(r-2)).(m-(r-1))}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots(r-2)(r-1).\ r}\, a^{m-r}\, b^{r} = R;$

das $(r+1)^{te}$ Glied $= \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots(m-(r-1)).(m-r)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ r.\ (r+1)}\, a^{m-(r+1)}\, b^{r+1} =$

$= \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots(m-(r-2)).(m-(r-1))}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(r-1).\ r} \times \frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{a^{m-r}}{a}\, b^{r}.\, b =$

$\frac{R.\ m-r}{r+1} \times \frac{b}{a};$

dieser Ausdruck ist wesentlich [illegible] (r+1)te Glied kann also aus dem vorhergehenden zu berechnen. Es ergibt sich durch [illegible] Ausdruck das (r+1)te Glied [illegible] rte Glied so gebildet daß man das kurz vorher gefunden mit den Factoren $\frac{m-r}{r+1}$ und $\frac{b}{a}$ multiplicirt. d.h. mit einem Bruche dessen Zähler die Differenz des Binomial Exponent und die Stelle des [illegible] Gliedes ist, und dem des folgenden Gliedes [illegible] werden soll, u. dessen Nenner die Stelle des zu bildenden Gliedes ist; und multiplicirt mit dem Quotienten des [illegible] Theils des Binoms wenn er durch den ersten dividirt.

jetzt b um eine Potenz höher und a um eine Potenz niedriger, also muß der litterari. Ausdruck des rten Glieds mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt werden. Der Coefficient des (r+1)ten Ausdrucks wird aus dem Coeff. des Glieds [illegible] rten Ausdr. gebildet indem man den letzten factor des Zählers um 1 vermindert, und als neuen factor ansetzt, und den letzten factor des Nenners um 1 vermehrt, und als neuen factor ansetzt, wenn nun im rten Glied die letzten factoren $\frac{m-(r+1)}{r}$, so muß der Coeff mit $\frac{m-r}{r+1}$ × mult. geworden

Wollte man nun hieraus das [illegible] Glied (1te)

und den vorhergehenden bilden zu können, nennt man das wirklich erste a^m = das 0te Glied nennen.

weil das 1te Gl. $(r+1)$ hat, ist, so ist $r=0$

und es wäre daher $a^m \cdot \frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a} = a^m \cdot \frac{m-0}{0+1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m}{1} \cdot a^{m-1} b$;

das ~~1te~~ 2te ~~Glied~~ Glied $= \frac{m}{1} a^{m-1} b \times \frac{m-r}{r+1} \times \frac{b}{a} = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$;

das 3te Glied $= \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 \times \frac{m-2}{1\ 3} \times \frac{b}{a} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$;

Zusatz 6. Seite 167.

Um nun diese Formel ~~damit~~ sie zur Anwendung etwas bequemer ist in eine andere Form zu bringen, setze man mit allen Schriftstellern der Kürze halber $\frac{b}{a} = Q$. das 1te Glied des Binoms $= P$, und begreife jedes Glied des entwickelten Binoms ~~seiner~~ seiner wirklichen natürlichen Ordnung nach A, B, C, D ... so wird also das Binom folgende kürzere Gestalt bekommen:

$\frac{b}{a} = Q$,
$a = P$;

$$(a+b)^m = \overset{A}{P^m} + \frac{m}{1} \overset{B}{AQ} + \frac{m-1}{2} \cdot \overset{C}{BQ} + \frac{m-2}{3} \overset{D}{CQ} + \frac{m-3}{4} \overset{E}{DQ} + \frac{m-4}{5} \overset{F}{EQ} + \dots$$

Da nun in der Anwendung bald die eine bald die andere Form vorgeht, so soll hier noch einmal die andere Form verzeichnet werden, also:

$$(1)\quad (a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots m-4}{1 \cdot 2 \dots 5} a^{m-5} b^5 + \dots$$

Zu Satz 7.

In der Anwendung kommen nun aber selten ganze und + Binom. Potenzen vor, in der Regel hat man es nur mit Divisionen und √ Ausziehungen zu thun.

Die Fälle die hier vorkommen können sind folgende:

I. $(a+b)^m = (a+b)^m$;

II $\frac{A}{(a+b)^n} = A(a+b)^{-n}$; = nach d. gewöhnlichen Art 2 Operationen

III $\sqrt[v]{(a+b)^m} = (a+b)^{\frac{m}{v}}$; = ——— 2 Operationen

IV $\frac{A}{\sqrt[v]{(a+b)^m}} = A.(a+b)^{-\frac{m}{v}}$; = ——— 3 Operationen

Man könnte zwar alle diese 4 Fälle nach gewöhnlichen Regeln entwickeln, allein daraus würde eine ungeheure Arbeit entstehen, besonders im IV^ten^ Falle, und hier ist es grade wo d. Binomische Lehrsatz die größten Vortheile gewährt.

Es muss also nur noch bewiesen werden, daß das was von + ganzen Exp: gilt, auch von − ganzen, und + u. − gebrochenen Exp. gilt.

vide. Functionen hier unten.

Man erinnere sich d. Funktionen von einerlei Form und der mit ihnen vorgenommenen Operationen, nämlich daß einerlei Form X gibt. div. potenzirt etc. eine wieder einerlei Form geben.

In unserm Falle sehen wir nun stets

$m = \frac{u}{v}$ gesetzt:

$$(a+b)^{\frac{u}{v}} = P^{\frac{u}{v}} + \frac{u}{v} AQ + \frac{u-v}{2v} BQ + \frac{u-2v}{3v} CQ + \frac{u-3v}{4v} DQ + \frac{u-4v}{5v} EQ + \ldots$$

Zusatz 8.

Wäre nun der Binom von d. Form $(a-b)^m$ so würde die Operation dieselbe bleiben, nur mit dem Unterschied daß alle ungeraden Potenzen von b negativ seyn würden, daher:

(denn allerdings ist $(a+b)^m = [a+(-b)]^m$, und $(-b)$ statt (b) in die Reihe gesetzt, giebt die ungeraden Potenzen $(-)$ also auch die Glieder der ungeraden Potenzen von b $(-)$)

$$(a\pm b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 - \ldots$$

Für die allgemeine Formel

$P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \ldots$ würde nun bei einem Binom $(a-b)$ auch d. Quotient $\frac{-b}{+a} = -Q$ seyn, welches zu berücksichtigen, also

$$(a\pm b)^m = P^m \pm \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ \pm \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ \pm$$

(denn das 1te Gl. ist + die übrigen werden wegen $-Q$ alle $-$, allein da das 2 an sich $-$ ist, so wird $-B \times -Q = + = C$, $C \times -Q = -D$.)

Zusatz 9 und 10.

Ueber Bestimmung der Glieder ihre Anzahl auch bei einem Binom welches [illegible] + [illegible] − [illegible] ± [illegible] Exp. hat. Daß $(a\pm b)^m$ eine bestimmte Anzahl Glieder nämlich $m+1$ Glied haben muß erhellte schon aus dem Vorhergehenden; allein auch noch aus der Bildung d. Coefficienten, denn wenn r gleich m wird in $\frac{m.m-1.m-2.\ldots m-r}{1.2.3.4.5r.(r+1)}$ so ist hat

(Bey ungleichen [illegible] wo ~~positive~~ m negativ ist, ist das 2te Glied Coeff $= \Delta$ gegeben $+A.x-\Delta.-Q=+$, das 3te Gl. $+B.-\Delta-Q=+$ u. s. w.)

das $(r+1)^{te}$ Glied zum Koeffizient $\frac{0}{r+1} \cdot R \cdot Q = 0$.

Hier ist auch das ganze Glied $= 0$;

Exponent $-m$

Ist aber d. Exponent $-m$ so ist es klar daß durch die Formel $\frac{-m. -m-1. -m-2. -m-3. \ldots -m-r}{1. \; 2. \; 3 \ldots\ldots\ldots -m-(r+1)} \ldots$ immer mehr neu negativen Einheiten in Zahlen zurück, welche unendlich wird.

Exp. $= +\frac{u}{v}$

Ist d. Exponent $+\frac{u}{v}$, vorausgesetzt daß er sich nicht zu einer ganzen Zahl reduzieren lasse, so kann auch hier die Reihe $\frac{u}{v}-1$; $\frac{u}{v}-2$, $\frac{u}{v}-3$, $\ldots 4 - 5 \ldots$ nie aufhören,

Exp. $-\frac{u}{v}$

bey $-\frac{u}{v}$ kann nun auch deshalb die Reihe nie aufhören

Von dem 11ten u 12ten Zusatz nach pag. 170 den 77ten §.

Aufgabe.

Ein Binom + + ganzem Exponent zu bestimmen. Wenn mir hiez Zahlen gegeben so ist es am vortheilhaftesten sie nach dem dekadischen Gesetz zu theilen. z.B. $(87)^4 = (80+7)^4$. Nach der Formel

$$P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \ldots$$

entwickelt, wird $P = 80$ $Q = \frac{7}{80}$ und es ist daher:

$P^m = 80^m = 80^4 = \ldots\ldots\ldots = 40960000 = A;$

$\frac{m}{1} AQ = \frac{4}{1} \cdot 40960000 \cdot \frac{7}{80} = 4 \cdot 512000 \cdot 7 = \ldots\ldots = 14336000 = B;$

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2} \cdot 14336000 \cdot \frac{7}{80} = 89600 \cdot 3 \cdot 7 = \ldots = 1881600 = C.$

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{2}{3} \cdot 1881600 \cdot \frac{7}{80} = 7840 \cdot 2 \cdot 7 = \ldots\ldots = 109760 = D;$

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4} \cdot 109760 \cdot \frac{7}{80} = 343 \times 7 \ldots\ldots = 2401 = E;$

$\frac{m-4}{4} EQ = \frac{0}{4} \cdot 2401 \cdot \frac{7}{80} = 0 \ldots\ldots = 0 =$

$57289761 = (84)^4;$

Ein anderes Beispiel sey:

$(2a - 3x^2)^5 =$ worin $P = 2a$ und $Q = -\frac{3x^2}{2a}$ ist, $m = 5;$

$P^m = (2a)^5 = 32a^5 = A.$

$\frac{m}{1} AQ = \frac{5}{1} \cdot 32a^5 \cdot -\frac{3x^2}{2a} = -240a^4x^2 = B$

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{4}{2} \cdot -240a^4x^2 \cdot -\frac{3x^2}{2a} = +720a^3x^4 = C$

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{3}{3} \cdot 720a^3x^4 \cdot -\frac{3x^2}{2a} = -1080a^2x^6 = D$

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{2}{4} \cdot -1080a^2x^6 \cdot -\frac{3x^2}{2a} = +810ax^8 = E$

$\frac{m-4}{5} EQ = \frac{1}{5} \cdot 810ax^8 \cdot -\frac{3x^2}{2a} = -243x^{10} = F.$

also

$(2a - 3x^2)^5 = 32a^5 - 240a^4x^2 + 720a^3x^4 - 1080a^2x^6 + 810ax^8 + 243x^{10};$

Ferner sey zu potenziren $\sqrt{a^2 \pm x^2} = (a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}};$

$\sqrt{a^2 \pm x^2} = (a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}$ und hier ist in der Formel

$$\overset{A}{P^{\frac{u}{v}}} \pm \frac{u}{v}\overset{B}{A}Q + \frac{u-v}{2v}\overset{C}{B}Q \pm \frac{u-2v}{3v}\overset{D}{C}Q \pm \frac{u-3v}{4v}DQ + \ldots$$

$P = a^2$; $Q = \pm\frac{x^2}{a^2}$ und $\frac{u}{v} = \frac{1}{2}$; daher.

$$P^{\frac{u}{v}} = (a^2)^{\frac{u}{v}} = a = A.$$

$$\frac{u}{v}AQ = \frac{1}{2}a \pm \frac{x^2}{a^2} = \pm\frac{1}{2}\frac{x^2}{a} = B;$$

$$\frac{u-v}{2v}BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \pm\frac{1}{2}\frac{x^2}{a} \cdot \pm\frac{x^2}{a^2} = -\frac{1}{2.4}\frac{x^4}{a^3} = C$$

$$\frac{u-2v}{3v}CQ = \frac{1-4}{6} = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{2.4}\frac{x^4}{a^3} \cdot \pm\frac{x^2}{a^2} = \pm\frac{1.3.}{2.4.6}\frac{x^6}{a^5} = D$$

$$\frac{u-3v}{4v}DQ = -\frac{5}{8} \cdot \pm\frac{1.3}{2.4.6}\frac{x^6}{a^5} \cdot \pm\frac{x^2}{a^2} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^8}{a^7} = E;$$

$$\frac{u-4v}{5v}EQ = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{x^8}{a^7} \cdot \pm\frac{x^2}{a^2} = \pm\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{x^{10}}{a^9} = F;$$

$$\frac{u-5v}{6v}FQ = -\frac{9}{12} \cdot \pm\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.}\frac{x^{10}}{a^9} \cdot \pm\frac{x^2}{a^2} = -\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} \cdot \frac{x^{12}}{a^{11}} = G.$$

Jetzt ist das Gesetz der Fortschreitung der Reihe hinlänglich klar und man kann sie leicht bis ins Unendliche fortsetzen; die nächsten Glieder wären

$$\pm\frac{1.3.5.\ldots 11}{2.4.\ldots\ldots 14} \cdot \frac{x^{14}}{a^{13}} - \frac{1.3.5.\ldots 13}{2.4.\ldots\ldots 16} \cdot \frac{x^{16}}{a^{15}} \pm \ldots\ldots$$

Wollte man nun aus dem Ausdruck $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ die Wurzel wirklich ausziehen, so würde man auch diese kennen, in dessen nebst der schwierigen Arbeit würde es noch folgenden Nachtheil haben, daß das Gesetz d. Fortschreitens d. Factoren der Coefficienten, welche sich nach der Binomialschen aus den ersten paar Gliedern giebt, hier verdeckt zeigt, indem die Zahl im Nenner gemacht und Zähler ~~in dem~~ als Product erscheinen:

$$\sqrt{a^2 \pm x^2} = a \pm \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \pm \frac{7x^{10}}{256a^9} - \cdots$$

$$\pm a^2$$

$$\pm x^2 \quad : 2a.$$

$$\pm x^2 \pm \frac{x^4}{4a^2}$$

$$-\frac{x^4}{4a^2} \quad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a}\right)$$

$$-\frac{x^4}{4a^2} \mp \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$$

$$\pm \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \quad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{4a^3}\right)$$

$$\pm \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} \mp \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

$$-\frac{5x^8}{64a^6} \pm \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \quad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{4a^3} \pm \frac{x^6}{8a^5}\right)$$

$$-\frac{5x^8}{64a^6} \mp \frac{5x^{10}}{128a^8} + \frac{5x^{12}}{512a^{10}} \mp \frac{5x^{14}}{1024a^{12}} + \frac{25x^{16}}{16384a^{14}}$$

$$\pm \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{5x^{14}}{1024a^{12}} - \frac{25x^{16}}{16384a^{14}} \quad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{4a^3} \pm \frac{x^6}{8a^5} - \frac{5x^8}{64a^7}\right)$$

Aus dem vorhergehenden ist nun klar daß für alle Fälle von d. Art $\sqrt[2]{a^2 \mp x^2}$ die vorhin erhaltenen [illegible] immer als Koefficienten erscheinen müssen, u. deshalb ist es für die Folge gut, sie bis etwa zum 20^{t} Glied in Decimale auszudrücken, weil es sich b. d. Anwendung gleich [illegible] (vide. [illegible] z. [illegible] Vorlage)

[illegible] hier d. [illegible] zu machen. d. Mittel ist [illegible] gut wenn man z. B. b. d. doppelt so großen Zahl dieselben Operationen macht, so muß sie [illegible] nur das doppelte vom andern [illegible].

Es frägt sich zu suchen: $\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{(a^2 \pm x^2)^{1/2}} = (a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Hier ist. $P = a^2;\ Q = \pm \frac{x^2}{a^2};\ u = -1;\ v = +2;$

$$P^{\frac{u}{v}} = (a^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{2}{2}} = \frac{1}{a} = A.$$

$$\frac{u}{v} AQ = -\frac{1}{2} \cdot +\frac{1}{a} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{a^3} = B$$

$$\frac{u-v}{2v} BQ = -\frac{3}{4} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{a^3} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = + \frac{1.3.}{2.4.} \frac{x^4}{a^5} = C$$

$$\frac{u-2v}{3v} CQ = -\frac{5}{6} + \frac{1.3.}{2.4} \frac{x^4}{a^5} \pm \frac{x^2}{a^2} = \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^6}{a^7} = D$$

$$\frac{u-3v}{4v} DQ = -\frac{7}{8} \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^6}{a^7} \pm \frac{x^2}{a^2} = + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{x^8}{a^9} = E \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{a^3} + \frac{1.3.}{2.4} \frac{x^4}{a^5} \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^6}{a^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{x^8}{a^9} \mp$$

$$\mp \frac{1.3.5.7.9}{2.4. \ldots 10} \frac{x^{10}}{a^{11}} + \frac{1.3. \ldots -11}{2.4. \ldots -12} \frac{x^{12}}{a^{13}} \mp \frac{1.3. \ldots -13}{2.4. \ldots -14} \frac{x^{14}}{a^{15}} + \ldots\ldots$$

Hier daß Decimal $\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ zu entwickeln. ~~[illegible]~~

Aus diesen Koeffizienten, die dem Bin. nach der Anwendung vorkommt ist jetzt zu entwickeln (vid. Kloberts Anhang) jetzt ist es dieser letztern ungeachtet und ihm die Coeff $\sqrt[2]{a+x^2}$ zu bestimmen.

Beispiel.

$$\frac{(a-2x)^2}{\sqrt[4]{(2a-\frac{1}{2}x^2)^3}} = (a-2x)^2 \cdot (2a-\tfrac{1}{2}x^2)^{-\frac{3}{4}};$$

Zuförderst suche man die Nenner. beigesetzt ist.

$P = 2a, \quad Q = -\frac{x^2}{4a}; \quad u = -3, \quad v = 4.$ also:

$$P^{\frac{u}{v}} = (2a)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.a^{\frac{3}{4}}} = A.$$

$$\frac{u}{v}AQ = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.a^{\frac{3}{4}}}\cdot -\frac{x^2}{4a} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4}\cdot\frac{x^2}{a^{\frac{7}{4}}} = B$$

$$\frac{u-v}{2v}BQ = -\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4.}\cdot\frac{x^2}{a^{\frac{7}{4}}} - \frac{x^2}{4a} = +\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4^2}\cdot\frac{x^4}{a^{\frac{11}{4}}} = C$$

$$\frac{u-2v}{3v}CQ = -\frac{11}{12}\cdot\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4^2}\cdot\frac{x^4}{a^{\frac{11}{4}}} - \frac{x^2}{4a} = \frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4^3}\cdot\frac{x^6}{a^{\frac{15}{4}}} = D$$

und der Ausdruck ist

$$\sqrt[4]{(2a-\tfrac{1}{2}x^2)^3} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.a^{\frac{3}{4}}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4}\cdot\frac{x^2}{a^{\frac{7}{4}}} + \frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4^2}\cdot\frac{x^4}{a^{\frac{11}{4}}} +$$

$$+ \frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4^3}\cdot\frac{x^6}{a^{\frac{15}{4}}} + \frac{3.7.11.15}{4.8.12.16}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.4^4}\cdot\frac{x^8}{a^{\frac{19}{4}}} + \ldots$$

wäre nun noch mit $(a-2x)^2 = a^2 - 4ax + 4x^2$ zu multipliciren; bequemer ist es bei Ausdrücken wie oben

die rationalen Theile von den irrationalen zu trennen und letztere in eine Parenthese zu schließen und den irrat. Theil als Fact. vorzusetzen; wenn nämlich in allen Gliedern er vorkömmt.

Hier ist überall d. Factor $\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{3}{4}}}$, sondert man diesen heraus, x [illegible] dann d $(a-2x)^2$ ~~zu stoßen~~ die Parenthese z

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(2a)^3}}\left[1+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{4a}+\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{x^4}{4^2a^2}+\frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{x^6}{4^3a^3}+\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16}\cdot\frac{x^8}{4^4a^4}+\frac{3.7.11.15.19}{4.8.12.16.20}\cdot\frac{x^{10}}{4^5a^5}+\dots\right]$$

$$a^2-4ax+4x^2$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(2a)^3}}\times\left\{\begin{array}{l} a^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{ax^2}{4}+\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{x^4}{4^2}+\frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{x^6}{4^3a}+\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16}\cdot\frac{x^8}{4^4a^2}+\frac{3.7.11.15.19}{4.8.12.16.20}\cdot\frac{x^{10}}{4^5a^3}+\dots \\ -4ax-\frac{3}{4}x^3-\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{x^5}{4.a}-\frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{x^7}{4^2a^2}-\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16}\frac{x^9}{4^3a^3}-\frac{3.7.11.15.19}{4.8.\dots 20}\cdot\frac{x^{11}}{4^4a^4}+\dots \\ +4x^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{a}+\frac{3.7}{4.8}\frac{x^6}{4a^2}+\frac{3.7.11}{4.8.12}\frac{x^8}{4^2a^3}+\frac{3.7.11.15}{4.8.\dots 16}\frac{x^{10}}{4^3a^4}+\dots \end{array}\right.$$

Es ist also der Ausdruck geordnet:

$$\frac{(a-2x)^2}{\sqrt[4]{(2a-\frac{1}{2}x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(2a)^3}}\cdot\Big[a^2-4a\,\Big|\,x+\begin{array}{l}3a\\+4\end{array}\Big|\,x^2-\frac{3}{4}\,\Big|\,x^3+\begin{array}{l}\frac{3.7}{4.8.4^2}\\+\frac{3}{4a}\end{array}\Big|\,x^4-\frac{3.7}{4.8.4.a}\,\Big|\,x^5+$$

$$+\begin{array}{l}\frac{3.7.11}{4.8.12.4^3a}\\+\frac{3.7}{4.8.4.a^2}\end{array}\Big|\,x^6-\frac{3.7.11}{4.8.12.4^2a^2}\,\Big|\,x^7+\begin{array}{l}\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16.4^4a^2}\\+\frac{3.7.11}{4.8.12.4^2a^3}\end{array}\Big|\,x^8-$$

$$-\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16\,4^3a^3}\,\Big|\,x^9+\begin{array}{l}\frac{3.7.\dots 19}{4.8.\dots 20\,4^5a^3}\\+\frac{3.7.\dots 15}{4.8.\dots 16.4^3a^4}\end{array}\Big|\,x^{10}-\frac{3.7.\dots 19}{4.8.\dots 20.4^4a^4}\,\Big|\,x^{11}\Big]$$

Seite 56. Zeile 2.

Wenn man eine vieltheilige Grösse in eine Potenz zu erheben hat, so kann man sich des Kunstgriffs bedienen, eine Grösse als einen Theil und das übrige als den 2ten Theil zu betrachten, gewöhnlich nimmt man [illegible] die ersten Glieder. [illegible] hat es [illegible] zu thun. Doch wir können solche Potenzirungen [illegible], nur selten mit 3 theiligen Grössen.

$(u+x+y+z)$ in die 4te Potenz zu erheben.

$(u+x+y+z)^4 =$ wenn $(u+x+y) = A$ ist: $= (A+z)^4$.

$(A+z)^4 = A^4 + 4A^3z + 6A^2z^2 + 4Az^3 + z^4$;

Nennen wir $(u+x) = B$ so ist $A = (B+y)$ und die verschiedenen Potenzen von A. =

$(B+y)^2 = B^2 + 2By + y^2$

$(B+y)^3 = B^3 + 3B^2y + 3By^2 + y^3$

$(B+y)^4 = B^4 + 4B^3y + 6B^2y^2 + 4By^3 + y^4$;

Setzt man nun diese für die Potenzen von A, d. h. nur $(B+y)$ so ist nun Ψ.

$(B+y+z)^4 = B^4 + 4B^3y + 6B^2y^2 + 4By^3 + y^4 + 4z(B^3 + 3B^2y + 3By^2 + y^3) +$

$+ 6z^2(B^2 + 2By + y^2) + 4z^3(B+y)$; für B den Werth $(u+x)$

gesetzt: $B^2 = u^2 + 2ux + x^2$; $B^3 = u^3 + 3u^2x + 3ux^2 + x^3$, und $B^4 = u^4 + 4u^3x + 6u^2x^2 + 4ux^3 + x^4$;

die Werthe für B in Φ gesetzt, giebt:

$u^4 + 4u^3x + 6u^2x^2 + 4ux^3 + x^4 + 4y(u^3 + 3u^2x + 3ux^2 + x^3) + 6y^2(u^2 + 2ux + x^2) + 4y^3(u+x) + y^4 +$

verte

Wenn man nun beim Substituiren in Ψ und eben so bei Φ zugleich die Ordnung beobachtet, so erhält man folgende Functionen:

$(u+x+y+z)^4 = u^4 + 4u^3(x+y+z) + 6u^2(x+y+z)^2 + 4u(x+y+z)^3 + (x+y+z)^4$

$(x+y+z)^2 = x^2 + 2x(y+z) + (y+z)^2$

$(x+y+z)^3 = x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + (y+z)^3$

$(x+y+z)^4 = x^4 + 4x^3(y+z) + 6x^2(y+z)^2 + 4x(y+z)^3 + (y+z)^4$

$(y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2$

$(y+z)^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$

$(y+z)^4 = y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4$

$$+4z\left[\left(u^3+3u^2x+3ux^2+x^3\right)+3y\left(u^2+2ux+x^2\right)+3y^2\left(u+x\right)+y^3\right]+$$

$$+6z^2\left[u^2+2ux+x^2+2y(u+x)+y^2\right]+4z^3\left[u+x+y\right];$$

F Es ist nicht genau richtig ausgesprochen
$(a+b)^{n-1}$ ist nicht = der Reihe ψ, weil die
Coeff: fehlen, allein darauf kommt es
auch nicht an. Man sollte sagen
Entwickelt man aus $(a+b)^{n-1}$ die brauchb.
litter: Glieder, welche die Reihe ψ
geben, und multipl. diese mit $(a-b)$ so
ist das Product = a^n-b^n
Entwickelt man aus $(a-b)^{n-1}$ die
litter: Glieder, welche die Reihe ψ
geben und multipl. diese mit $(a+b)$
so ergiebt sich ein Product =
$a^n \pm b^n$

Man kann dies nun auch ferner entwickeln zu [illegible] wenn es auch die eine oder die andere Art [illegible]

s. Zusätz. 11. u. 12. Seite 166.

dieser Satz betrachtet die Summen und Differenzen zweier in gleiche Dignitäten erhobenen Größen.

Erhebt man nun also $(a+b)$ in die $(n-1)^{te}$ Potenz so sind die litteralischen Produkte folgende:

$$F\ (a+b)^{n-1} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots\ldots a^3b^{n-4} + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1} = \psi$$

x multipl. mit $a-b$

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 \ldots\ldots + a^4b^{n-4} + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}$$
$$-a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots - a^3b^{n-3} - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n;$$

$$= a^n - b^n;$$

Erheben nun $(a-b)$ zur $(n-1)$ Potenz so sind die litteralischen Produkte:

$$(a-b)^{n-1} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \ldots\ldots \mp a^3b^{n-4} \pm a^2b^{n-3} \mp ab^{n-2} \pm b^{n-1} =$$

x multipl. $a+b$

$$a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots \mp a^4b^{n-4} \pm a^3b^{n-3} \mp a^2b^{n-2} \pm ab^{n-1}$$
$$+a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots \mp a^3b^{n-3} \pm a^2b^{n-2} \mp ab^{n-1} \pm b^n;$$

$$= a^n \pm b^n;$$ die doppelten Zeichen sind [zu viel]

die verschiedenen Fälle wo n eine gerade oder ungerade, + wenn n ungerade, − wenn n gerade ist, weil aber von $\pm b^{n-1}$ abhängt, daß mit −b multiplicirt wird

gerade Zahl ist. ~~...~~ folgt ist also, wenn man umgekehrt schließt

$$a^{2r}-b^{2r}=(a^{2r-1}-a^{2r-2}b+a^{2r-3}b^{2}-a\dots\dots\dots-a^{2}b^{2r-3}+ab^{2r-2}-b^{2r-1})(a+b)$$

$$a^{2r}-b^{2r}=(a^{2r-1}+a^{2r-2}b+a\,a^{2r-3}b^{2}+\dots\dots\dots+a^{2}b^{2r-3}+ab^{2r-2}+b^{2r-1})(a-b)$$

ferner und

$$a^{2r+1}-b^{2r+1}=(a^{2r}+a^{2r-1}b+a^{2r-2}b^{2}+a^{2r-3}b^{3}+\dots+a^{3}b^{2r-3}+a^{2}b^{2r-2}+ab^{2r-1}+b^{2r}).(a-b)$$

~~$a^{2r+1}+b^{2r+1}=(a^{2r}-a^{2r-1}b+a^{2r-2}b^{2}\dots+a^{2}b^{2r-2}-ab^{2r-1}+b^{2r})(a+b)$~~

~~$a^{2r+1}+b^{2r+1}=(a^{2r}+a^{2r-1}b+a^{2r-2}b^{2}\dots+a^{2}b^{2r-2}+ab^{2r-1}+b^{2r})(a+b)$~~

$$a^{2r+1}+b^{2r+1}=(a^{2r}-a^{2r-1}b+a^{2r-2}b^{2}-\dots\dots+a^{2}b^{2r-2}-ab^{2r-1}+b^{2r}).(a+b)$$

das Oben abgehandelte erhellt also:

die Differenz zweyer gleichen geraden Dignitäten, läßt sich allemal auf eine doppelte Art in Factoren zerfällen.

1) ein Factor enthält die Summe d. Vzeln, der andere eine Reihe, die die litter: Glieder enthält, deren Summe die Differenz der V zur (n−1)ten Potenz erhoben (n−1)ten Potenz von der Differenz der Vzln bilden

2) ein Factor hat die Diff: d. V, u. d. andere die Reihe der litt: Glieder, ~~(...)~~ Summe der V zur (n−1)ten Potenz erhoben.

~~Die Differenz und Summe der zweyer ungeraden Dignitäten; läßt sich dagegen so auflösen, daß der eine Factor entweder vorzugsweise die Summe od. Differenz d. beiden V, und der 2te Factor dagegen die litteralischen Producte, umgekehrt~~

Die Differenz 2er ungeraden Dignitaeten hat nur einen Werth nemlich das Product der Diff: der Wurzel und der Reihe der litt: Glieder aus der Summe der Wurzel erhoben zu n−1ten Potenz

Die Summe 2 Dignitaeten kann nur bestimmt w. wenn sie ungerade sind, sie ist denn gleich dem Producte der Summe der Vzln, und der Reihe der litt: Glieder aus der Diff der V. erhoben zu (n−1)ten Potenz

~~enthält d. Summe od. d. Differenz zwo(er)~~ [illegible]

Potenz erhoben enthält.

Beyspiele.

$$a^4-b^4=(a-b)(a+b)^3$$
$$=(a+b)(a-b)^3$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a+b)^4$$
~~$=(a+b)(a-b)^4$~~

$$a^5+b^5=(a+b)(a-b)^4$$
~~$=(a+b)(a-b)^4$~~

d. h. nur in Rücksicht der litteralischen Producte.

Die Summe ~~zweyer~~ gleich großen graden Dignitaeten ist dagegen nicht möglich. Obgleich dies eigentlich nicht hieher gehört, so ist es doch ~~aus~~ folgendem einzusehen klar:

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$; mithin nirgends ist a^2+x^2 allein zu sehen.

Gesetzt auch x^2+a^2 wäre gleich Null so ist.

$x^2+a^2=0$; $x^2=-a^2$; $x=\sqrt{-a^2}$ = einer unmöglichen Größe, die wieder zurückgeschließt.

Die Unmöglichkeit der Zerlegung besteht auf diesem Wege nicht [illegible] — das angeführte Beyspiel ist zu genau [illegible]. Denn da[ss] x^2+a^2 nicht = ist $(x+a)(x+a)$, auch nicht = $(x-a)(x-a)$, auch nicht = $(x+a)(x-a)$ [folgt], so kann es doch andere Combinationen von x und a geben, deren x^2+a^2 = ist. z. B.

$(a-b)a=a^2-ab$
$(a+b)b=ab+b^2$ $\Big\}=a^2+b^2=(a-b)a+(a+b)b$

Allein dieses damit bloß für diesen speciellen Fall. Der allgemeine Satz läßt sich auf keine Weise anlegen.

folgende giebt $x = \sqrt{-a^2}$ ∓ $x = \mp a\sqrt{-1}$ ∓ $x^2 = -a^2$;

379. Aufgabe;

Eine Formel anzugeben, welche dienen soll jede Irrationalwurzel einer Zahl durch schnelle Näherung zu finden.

Dieses soll nicht allein für alle Fälle der [illegible] Wurzelgrößen [illegible], sondern auch noch dazu dienen, selbst wenn man die Logarithmen & Wurzel [illegible] und die [illegible] sich [illegible] z. B. nur auf 6 – 7 Stellen finden, obgleich ich deren 12 – 14 zur Richtigkeit & Genauigkeit der Rechnung nöthig habe, auch eine bequeme Art diese Stellen zu finden. z. B. $\sqrt[2]{12} = 3,46 + x$ wo x ein echter Bruch & zwar um so unbedeutender wird je weiter er vom Komma entfernt ist, dieses x soll man suchen. Es sey:

$$\sqrt[m]{a} = b + x \text{ so ist } a = (b+x)^m = b^m + \frac{m}{1} b^{m-1} x + \frac{m.m-1}{1.2} b^{m-2} x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} b^{m-3} x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} b^3 x^{m-3} + \frac{m.m-1}{1.2} b^2 x^{m-2} + \frac{m}{1} b x^{m-1} + x^m ;$$

da nach der Voraussetzung x hier ein echter Bruch und zwar vom geringen Werth ist, so erhellt

Die Bestimmung der Coeff: kann [illegible] von hinten ist [illegible] das letzte Glied hat zum Coeff: $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 4.3.2.1}{1.2.3.4\ldots(m-3)(m-2)(m-1)m}$ es haben sich also alle Glieder [illegible] der vorletzte Coeff: ist um den Factor $\frac{1}{m}$ kleiner es heben sich also alle Glieder bis auf $\frac{m}{1}$ der drittletzte Coeff: ist um den Factor $= \frac{2.1}{(m-1).m}$ kleiner es heben sich also alle Glieder bis auf $\frac{m(m-1)}{1.2}$ u. s. f. so daß die Coeff der Glieder von hinten mit denen von vorne correspondiren, und ist die Zahl der Glieder gerade, so sind die mittleren 2 gleiche Coeff: wenn z. B. die 5te Potenz 6 Glieder [hat] die Coeff: sind 1, 5, 10, 10, 5, 1. die 6te 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. u. s. f.

daß die Glieder von x in Potenzen vorkommt, von sich unbekannten Werth sagen müssen, derselbe kann man sie alle bis auf x^1 weglassen, und es steht daher:

$a = b^m + mb^{m-1}x$; so $x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1}}$ dieser Bruch wäre nun schon ein Näherungsbruch, wollte es sich aber noch genauer wünschen, so nimmt er noch ein Glied des Binoms zu also hier noch:

$$a = b^m + m.b^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x^2.$$

Dies wäre nun eine unreine Quadratische Gleichung, sie als solche aufzulösen wäre aber ~~wäre~~ nicht vortheilhaft, weil dann in der Auflösung ebenfalls eine Wurzelziehung die doch vermieden werden soll vorkäme. daher muß er sie umformen, indem man x sucht:

$$a - b^m = m.b^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x^2;$$

$$a - b^m = \left(mb^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x\right).x, \text{ so also:}$$

φ — $x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x}$ für das x im Nenner setzt man nun den ersten gefundenen Näherungswerth $x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1}}$ so ist in φ;

$$x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1} + \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2} b^{m-2} \times \frac{a-b^m}{mb^{m-1}}} = \frac{a-b^m}{mb^{m-1} + \frac{m-1}{2b}\cdot(a-b^m)} =$$

$$x = \frac{2b(a-b^m)}{2mb^m + (m-1)\cdot(a-b^m)} = \frac{2b(a-b^m)}{2mb^m + ma - a - mb^m + b^m} =$$

$$x = \frac{2b(a-b^m)}{(m+1)b^m + (m-1)a} \text{ ; für } \sqrt[m]{a}$$

Setzt man nun für m Werthe, so ist

für $\sqrt[2]{a}$; $x = \frac{2b(a-b^2)}{3b^2+a} = \frac{2b(a-b^2)}{3b^2+a}$

— $\sqrt[3]{a}$; $x = \frac{b(a-b^3)}{2b^3+a} =$

für $\sqrt[4]{a}$; $x = \frac{2b(a-b^4)}{5b^4+3a}$

— $\sqrt[5]{a}$; $x = \frac{2b(a-b^5)}{6b^5+4a}$ u. s. w.

Wenn man nun nach dieser Formel verfährt, so kann man mit Gewissheit darauf rechnen, daß man wenigstens doppelt soviel richtige Ziffern erhält als vorher bekannt waren. So daß man z. B. wenn Decimal Stellen sich [illegible] 2; bey 2 [illegible] 4, bey 3 sich [illegible] 6. bei 8 sich [illegible] 16 u. s. w. [illegible] kann; [illegible] waren vorher noch mehrere richtig,

und zwar aus dem Grunde weil x^2 in d. Regel verkannt z. B. 0,01 als richtig angenommen giebt und Quadrat $\pm 0,0001$ als richtig u. s. w.

Anwendung.

$\sqrt[3]{35,000} = 3,3$ (hier zu groß x wird daher negativ)

```
  27
  8000 : 27
  81
   81
    27
  8937
```

Ferner $x = \frac{b(a-b^3)}{2b^m + a}$ für $\sqrt[3]{a}$.

daher $x = \frac{3,3(35-3,3^3)}{2.33^3 + 35}$ für $\sqrt[3]{35}$;

$$x = \frac{3,3(35 - 35,937)}{71,874 + 35} = \frac{-3,3 \times 0,937}{106,874} =$$

$x = -0,0287$.. dies von 3,3 abgezogen giebt $b + x = 3,2713$..... wobey man bedenken muss daß 3,3 zu groß war daher nur etwa 4 richtige Ziffern rechnen kann also hier 3,271.

Setzt man dies nun gleich b um das ferneren x zu suchen so ist.

$$x = \frac{3,271(35 - 3,271^3)}{2 \times 3,271^3 + 35} = \frac{3,271(35 - 34,99787151)}{69,9957430\,22 + 35}$$

$$= \frac{0,00696228751900}{104,993743022} = 0,00006631$$

Dies zu dem vorigen Werth von $b+x = 3,2713$ addirt gibt $3,271306631$ für $\sqrt[3]{35}$, welches man als ganz genau richtig annehmen kann.

§80. Aufgabe.

Wenn man eine 2theilige $\sqrt{\ }$ Größe wie $\sqrt[n]{A} \pm \sqrt[n]{B}$ hat wie kann man eine mehrtheilige bestimmen, die wenn man sie mit ihr als Factor multiplicirt einen rationalen zweytheiligen Größe zum Product gibt? (vide hier Seite 136). —— Es sei $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ gegeben. Man erhebe $\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$ zur $(n-1)^{ten}$ Potenz d. nullgliedrig (d. h. ohne Coeffizient) und mit $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, so wird das Product geben $A+B$ oder $A-B$ je nachdem n eine ungerade od. gerade Zahl war. Bei $\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$ erhebe man dagegen $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ zur $(n-1)^{ten}$ Potenz und setze als 2ten Factor $\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$.

Beispiele.

Es sey gegeben $\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b}$ man solle sie rational machen durch einen 2ten Factor.

$$\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b} = \left(\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b}\right) \cdot \left(\sqrt[5]{3a^3} + \sqrt[5]{2b}\right)^4;$$

$$\left(\sqrt[5]{3a^3} + \sqrt[5]{2b}\right)^4 = \left((3a^3)^{\frac{1}{5}} + (2b)^{\frac{1}{5}}\right)^4 = P^m + AQ + BQ + CQ + \ldots\ldots$$

Hier ist $P = (3a^3)^{\frac{1}{5}}$; $m = 4$ und $Q = \dfrac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}}$; es ist also:

$$P^m = \left((3a^3)^{\frac{1}{5}}\right)^4 = (3a^3)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3)^4} = A$$

$$AQ = (3a^3)^{\frac{4}{5}} \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (3a^3)^{\frac{3}{5}} \times (2b)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3)^3 \cdot 2b} = B.$$

$$BQ = (3a^3)^{\frac{3}{5}} \cdot (2b)^{\frac{1}{5}} \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (3a^3)^{\frac{2}{5}} \cdot (2b)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3)^2 \cdot (2b)^2} = C$$

$$CQ = (3a^3)^{\frac{2}{5}} \cdot (2b)^{\frac{2}{5}} \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (3a^3)^{\frac{1}{5}} \cdot (2b)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3) \cdot (2b)^3} = D.$$

$$DQ = (3a^3)^{\frac{1}{5}} \cdot (2b)^{\frac{3}{5}} \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (2b)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(2b)^4} = E;$$

Hier stellt nun [illegible] die Potenzirung des [illegible] n . n−1 . n−2 . n−3 [illegible] = 0 weg, welches man an den Coefficienten hat, daher kann man hier nun daran sehen daß man genau potenzirt hat wenn des höchsten Grad[illegible] den Exponent 0 erscheint, als vorstellt. der 2te Faktor würde also die hier gefundenen Glieder A, B, C, D, E zeigen. Multiplicirt man wirklich so ist:

$$\sqrt[5]{(3a^3)^4} + \sqrt[5]{(3a^3)^3 \cdot 2b} + \sqrt[5]{(3a^3)^2 \cdot (2b)^2} + \sqrt[5]{(3a^3)(2b)^3} + \sqrt[5]{(2b)^4};$$
$$\sqrt[5]{(3a^3)} - \sqrt[5]{2b}$$

=

$$\sqrt[5]{(3a^3)^5} + \sqrt[5]{(3a^3)^4\cdot 2b} + \sqrt[5]{(3a^3)^3(2b)^2} + \sqrt[5]{(3a^3)^2(2b)^3} + \sqrt[5]{(3a^3)(2b)^4}$$

$$- \sqrt[5]{(3a^3)^4\cdot 2b} - \sqrt[5]{(3a^3)^3\cdot(2b)^2} - \sqrt[5]{(3a^3)^2\cdot(2b)^3} - \sqrt[5]{(3a^3)\cdot(2b)^4} - \sqrt[5]{(2b)^5};$$

$$= 3a^3 - 2b$$

Also:

$$\left(\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b}\right)\cdot\left(\sqrt[5]{(3a^3)^4} + \sqrt[5]{(3a^3)^3\cdot 2b} + \sqrt[5]{(3a^3)^2\cdot(2b)^2} + \sqrt[5]{(3a^3)(2b)^3} + \sqrt[5]{(2b)^4}\right) = 3a^3 - 2b;$$

$$\left(\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b}\right)\cdot\left(a^2\sqrt[5]{81a^2} + a\sqrt[5]{54a^4b} + a\sqrt[5]{36ab^2} + \sqrt[5]{24a^3b^3} + \sqrt[5]{16b^4}\right) = 3a^3 - 2b;$$

Seite 180 u. 187 steht d. Vorschriften im 1ten u. 2ten Zusatz:

Haben die gegebenen √Größen Coeffizienten so bringe man diese erst unter das √Zeichen; haben sie ungleiche √Exponenten so mache ich sie erst = namig:

Beides wird im untenstehenden Beispiel gezeigt:

Es ist rational zu machen $a\sqrt[3]{b^2} - 2b\sqrt[2]{a}$:

$$a\sqrt[3]{b^2} - 2b\sqrt[2]{a} = ab^{\frac{2}{3}} - 2ba^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}} - 2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}} =$$

$\sqrt[6]{a^6b^4} - \sqrt[6]{2^6b^6a^3}$; hier muss also die 5te Potenz in Rücksicht der litteralischen Produkte machen, und zwar von $\sqrt[6]{a^6b^4} + \sqrt[6]{2^6b^6a^3}$;

Bei der 5ten Dignität also von.

$$\left(\sqrt[6]{a^6b^4} + \sqrt[6]{2^6b^6a^3}\right)^5 = \left(a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}} + 2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}\right)^5$$ ist nach

$$P^m + AQ + BQ + CQ + \dots\dots \quad P =$$

$$P = a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\;;\quad Q = \frac{2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}} \text{ und } m = 5.$$

Q nicht abgekürzet ist hier in d. Ansatz vortheilhafter. Es ist daher:

$$P^m = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^5 = A$$

$$AQ = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^5 \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}} = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^4 \cdot 2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}} = B$$

$$BQ = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^4 \cdot \left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right) \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}} = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^3 \cdot \left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right)^2 = C$$

$$CQ = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^3 \cdot \left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right)^2 \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}} = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^2 \cdot \left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right)^3 = D$$

$$DQ = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)^2 \cdot \left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right)^3 \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}} = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)\left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right)^4 = E$$

$$EQ = \left(a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}\right)\left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right)^4 \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}}} = \left(2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}\right)^5 = F.$$

Multiplicirt man nun $(A + B + C + D + E + F)$ mit $a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{4}{6}} - 2^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} a^{\frac{3}{6}}$, so erhält man den Ausdruck $a^6 b^4 - 2^6 b^6 a^3$ als einen rationalen Ausdruck und es ist also:

$$\left(a\sqrt[3]{b^2} - 2b\sqrt{a}\right) \cdot \left(a^5 b^3 \sqrt[3]{b} + 2a^4 b^3 \sqrt[6]{a^3 b^4} + 4a^4 b^4 + 8a^3 b^4 \sqrt[6]{a^3 b^2} + 16a^3 b^4 \sqrt[3]{b^2} + 32a^2 b^5 \sqrt{a}\right) =$$

$$= a^6 b^4 - 2^6 b^6 a^3;$$

Der 3te Zusatz enthält nichts als eine Wiederholung des schon gesagten.

Wenn nämlich ein Bruch gegeben ist, wo im Nenner eine 2theilige Irrationel Grösse vorkömmt, und man soll den Nenner zur Bequemlichkeit der Rechnung rational machen, so würde man wie oben gezeigt ist verfahren, es würde demnach (Man sehe hier meine 10te Note v. d. Wurz. d. Grössen —).

z. B. $\frac{c-ad}{a\sqrt[3]{b^2}-2b\sqrt{a}}$ = seyn:

$$\frac{(c-ad).(a^5b^3\sqrt[3]{b}+2a^4b^3\sqrt[6]{a^3b^4}+4a^4b^4+8a^3b^4\sqrt[6]{a^3b^2}+16a^3b^4\sqrt[3]{b^2}+32a^2b^5\sqrt{a})}{a^6b^4-2^6b^6a^3};$$

VIII Abschnitt.

Allgemeiner Beweis des binomischen Lehrsatzes, und Anwendung derselben Beweisart auf die Erfindung der unbestimmten Potenz jeder ohne Ende fortgehenden Funktion; $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\ldots\ldots$

Dieser Abschnitt enthält die Gründe, warum wir ein Binom so behandeln konnten (Abschnitt 7) d. wir es thaten, d. h. nicht allein bey Ex-

Erhebung in eine + Dignität, sondern auch bey
jeder Dignitäts Erhebung.
Den Beweis leiteten wir nur für + Exponent
mit Hülfe der unvollständigen Induktion (und den
5 ersten Potenzen) ab. Daraus erlaubten wir
uns auch anzunehmen, was für ganze + Exponent
gelte, auch für − u. bruch Exponenten anzunehmen,
indem wir ~~setzen~~ m sey $= -n \pm \frac{u}{v} = r$, und
bey schließen. Jetzt soll die Richtigkeit dieser
Annahme bewiesen werden.
Dieser Beweis ist eigentlich von Kästner zuerst
geführt worden, aber durch Hülfe der Diff: Rechnung;
und hierin liegt grade die Kunst des Schl. daß
er diese Differenzial Sprache in rein analitische
Sprache übersetzt hat, und dies macht diesen
Beweis so weitläuftig.

Eine Function Exponentiiren heißt jedes
Glied derselben mit dem darin vorkommenden
Exponent der veränderlichen Größe multi-
pliciren.

Soll also ein $E. Z = a + bx + dx^m + ex^n + fx^p + \ldots$

exponentiirt werden so [illegible] ist sie =

$ax^0 + bx x^0 + dx^m + ex^n + fx^p + \ldots =$

$= 0.ax^0 + 0.bx x^0 + mdx^m + nex^n + pfx^p + \ldots$

Die Änderung wird angezeigt durch $E.$ welches man vor die zu exponentiirende Function schreibt; also:

$E. Z =$ das Exponentiale von der gegebenen Function und da in [illegible] in den ersten 2 Gliedern 0, Factor ist so fallen sie weg und es ist daher.

$E. Z = mdx^m + nex^n + pfx^p + \ldots$

Der Verfasser braucht hier auch noch ein kleines e, mit dem Unterschied daß er dieß statt dem großen E schreibt, wenn das Exponentiale einer höheren Dignität einer Funktion genommen werden soll. z. B. $(a + ax + ax^2 + \ldots)^4$ E. von diesem Exponentiale sagt er $e.(a+ax+ax^2+\ldots)$

Wir wollen aber nur immer das große E brauchen; zur Deutlichkeit aber immer es nach einem Punkt vor die zu exponentiirende Größe

Lernmin.

Lehrsatz.

Die Exponentiale einer gegebenen Funktion Z^m ist $EZ^m = m.Z^{m-1}.E.Z$; und soll nun bewiesen werden; für einen speciellen Fall also wäre $E.(4-8x+6x^2)^3 = 3(4-8x+6x^2)^2 . E.(4-8x+6x^2)$;

Der Gang des Beweises ist der, daß ~~der Verfasser~~ die Richtigkeit des Satzes vom Quadrate im §81 beweiset und im §82 das allgemeine; indem er zeigt: $E.Z^2 = 2Z.E.Z$, wo Z eine beliebige Anzahl Glieder haben kann als $Z=\alpha+ax^m+bx^n+cx^p+ \dots kx^s+lx^t$.

Er zeigt die Richtigkeit dieses untergeordneten Satzes indem er zeigt erst für $Z=\alpha+ax^m$ dann $Z=\alpha+ax^m+bx^n$ dann $Z=(\alpha+ax^m+\dots)$

Gut ist es nun wenn man bey jeder Behauptung die Behandlung [illegible] Beispiele sieht, denn hat man mehr Ueberzeugung vom allgemeinen

---

Differenzialformel. $dZ^m = mZ^{m-1}.dZ$

Beweis ist $Z=\alpha+ax^m$, so ist

$$Z^2=\alpha^2+2\alpha ax^m+a^2x^{2m}$$
$$EZ = max^m$$
$$EZ^2 = 2m\alpha ax^m + 2ma^2x^{2m}$$
$$= (2\alpha+2ax^m)max^m$$
$$= 2Z.EZ$$

ist $Z=(\alpha+ax^m+bx^n)$

$$EZ = max^m+nbx^n$$
$$Z^2=(\alpha+ax^m)^2+2(\alpha+ax^m)bx^n+b^2x^{2n}$$
$$E.Z^2 = E.A + E.B + E.C$$
$$E.A=(2\alpha+2ax^m)max^m$$
$$E.B = 2\alpha bnx^n+2ab(m+n)x^{m+n}$$
$$= 2\alpha bnx^n+2abmx^{m+n}+2abnx^{m+n}$$
$$E.C = 2nb^2x^{2n}$$
$$EZ^2=(2\alpha+2ax^m+2bx^n)amx^m + (2\alpha+2ax^m+2bx^n)bnx^n$$
$$EZ^2=(2\alpha+2ax^m+2bx^n)(amx^m+bnx^n)$$
$$EZ^2 = 2Z.EZ$$

cf. p. 150.

wodurch Beweis synthetisch geführt wird

und dieselbe soll in erst an einem speciellen Falle gezeigt werden. — Gleichgültig ist es übrigens nach welchen Dignitaeten von x die Funktion steigt.

Es sey also $Z^n = (3+4x^2-2x^5)^4$; und also

$$E.(3+4x^2-2x^5)^4 = 4(3+4x^2-2x^5)^3 \times E.(3+4x^2-2x^5) \quad = \quad \Phi.$$

Erhebt man nun die Funktion von $(3+4x^2-2x^5)$ in den Cubus 3 und Biquadrat so ist

$$(3+4x^2-2x^5)^3 = 27+108x^2+144x^4-54x^5+64x^6-144x^7-96x^9+36x^{10}+48x^{12}-8x^{15}; = Dr.$$

und

$$(3+4x^2-2x^5)^4 = 81+432x^2+864x^4-216x^5+768x^6-914x^7+256x^8-1152x^9+216x^{10}-$$
$$-512x^{11}+576x^{12}+384x^{14}-96x^{15}-128x^{17}+16x^{20}; \quad = \quad B.$$

Multiplicirt man also nun in d. Grundgleichung Φ

$(3+4x^2-2x^5)^3 = Dr.$ mit $\underline{4}$. so ist.

$$(3+4x^2-2x^5)^3.4 = 108+432x^2+576x^4-216x^5+256x^6-576x^7-384x^9+144x^{10}+192x^{12}-32x^{15}; = C$$

$$E.(3+4x^2-2x^5) = 8x^2-10x^5,$$ dies mit

C, multiplicirt wie es in Φ gefordert wird giebt:

$$4(3+4x^2-2x^5)^3 \times E.(3+4x^2-2x^5) = 864x^2+3456x^4-1080x^5+4608x^6-6048x^7$$
$$+2048x^8-10368x^9+2160x^{10}+5632x^{11}+6912x^{12}+5376x^{14}-1440x^{15}-2176x^{17}+320x^{20};$$

dies muß nun gleich seyn dem $E.(B) = E.(3+4x^2-2x^5)^4$.

Sucht man wirklich das E. von B so wird man

denselben Resultat erhalten.

Gerade konnte man nun schon einen Beweis nehmen, der aber für und ... hinauslaufen wäre.

Der Verfasser geht nun wie schon gesagt erst vom Quadrate aus, und braucht dann das vollständige Induktion, daß das Gesetz was für m Größen wahr ist auch für $(m+1)$ Größen gilt, mithin allgemein wahr ist.

Es soll also bewiesen werden:

daß $\underline{\mathcal{E}.\,z^2 = 2z\,\mathcal{E}.\,z}$ wo

$z = (\alpha + ax^m + bx^n + cx^p + \dots kx^s + lx^t)$.

Der Verfasser nimmt erst für z die beiden ersten Glieder dieser Funktion dann 3 Glieder u.s.w. Es ist also für:

$$z = \alpha + ax^m$$

$$\mathcal{E}.(\alpha+ax^m)^2 = 2(\alpha+ax^m).\,\mathcal{E}.(\alpha+ax^m);$$

$$\mathcal{E}(\alpha+ax^m)^2 = \mathcal{E}(\alpha^2 + 2\alpha ax^m + a^2x^{2m}) = 0.\alpha^2 + 2m\alpha ax^m + 2ma^2x^{2m}.$$
$$= 2m\alpha ax^m + 2ma^2x^{2m}$$

der 2te Theil der Gleichung:

$$2(\alpha+ax^m).\,\mathcal{E}.(\alpha+ax^m) = 2\alpha + 2ax^m \times (0\alpha + max^m) = 2m\alpha ax^m + 2ma^2x^{2m}$$

welches aber auch der erste Theil der Gleichung

gibt: —

Da für $Z = x + ax^m + bx^n$ ist

$$\mathcal{E}.(x+ax^m+bx^n)^2 = 2(x+ax^m+bx^n) \times \mathcal{E}.(x+ax^m+bx^n)$$

der erste Theil d. Gleichung.

$$\mathcal{E}.(x+ax^m+bx^n)^2 = \mathcal{E}.(x^2+2xax^m+a^2x^{2m}+2abx^{m+n}+b^2x^{2n}+2xbx^n) =$$

$$= 0.x^2+2mxax^m+2ma^2x^{2m}+2nxbx^n+2(m+n)abx^{m+n}+2nb^2x^{2n}$$

der 2te Theil der Gleichung

$$2(x+ax^m+bx^n).\mathcal{E}.(x+ax^m+bx^n) = (2x+2ax^m+2bx^n).(0.x+max^m+nbx^n) =$$

$$= 2mxax^m+2ma^2x^{2m}+2mabx^{m+n}+2nxbx^n+2nabx^{m+n}+2nb^2x^{2n} =$$

$$= 2mxax^m+2ma^2x^{2m}+2nxbx^n+2(m+n)abx^{m+n}+2nb^2x^{2n};$$

welches auch der 1te Theil der Gleichung giebt.

Jetzt könnte man nun schon wieder durch unvollständige Induction die Richtigkeit der Behauptung des Satzes beweisen, allein der Verfasser. Theil dies allgemein für die r gliedrige Funktion, d. h. prüft er nun ob das was von r gliedriger Funktion gilt, auch von der $(r+1)$ gliedrigen Funktion statt findet.

Daher nimmt er in oben genannten Funktion $Z = (x + ax^m + bx^n + \ldots Kx^s + lx^t)$ die ersten

Gleichg. $\alpha + ax^m + bx^n + \dots Kx^s = A$.

und $Z = A + lx^t$.

Es wäre hiernach.

$$\mathcal{E}.Z^2 = 2(A+lx^t).\mathcal{E}(A+lx^t) = \mathcal{E}.(A+lx^t)^2.$$

der eine Theil der Gleichung.

$$\mathcal{E}.(A+lx^t)^2 = \mathcal{E}(A^2+2Alx^t+l^2x^{2t}) = \mathcal{E}.A^2 + \mathcal{E}.2Alx^t + \mathcal{E}.l^2x^{2t};\ \text{— } \Psi$$

Entwickelt man nun hier die Werthe für $A^2 = A$ so ist also:

$$\mathcal{E}.A^2 = \mathcal{E}(\alpha+ax^m+bx^n+\dots Kx^s)^2 = 2(\alpha+ax^m+bx^n+\dots Kx^s).\mathcal{E}.(\alpha+ax^m+\dots Kx^s)$$

dies wird als bekannt angenommen weil unter anderen Formen schon bewiesen worden soll. F

die Exponentiale wirklich genommen, so ist:

$$\mathcal{E}.A^2 = 2(\alpha+ax^m+bx^n+\dots Kx^s).(0.\alpha+max^m+nbx^n+\dots sKx^s);$$

das Exponentiale:

$$\mathcal{E}.2Alx^t = \mathcal{E}.2lx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\dots Kx^s).$$ bringt man die Ueberschrift wegen x^t in die Parenthese so ist.

$$\mathcal{E}.2Alx^t = \mathcal{E}.2l(\alpha x^{0+t}+ax^{m+t}+bx^{n+t}+\dots Kx^{s+t})$$ und

$$\mathcal{E}.2Alx^t = 2l[(0+t)\alpha x^{0+t}+(m+t)ax^{m+t}+(n+t)bx^{n+t}+\dots(s+t)Kx^{s+t}]$$

$$\mathcal{E}.2Alx^t = 2l(0.\alpha x^{0+t}+t\alpha x^{0+t}+max^{m+t}+tax^{m+t}+nbx^{n+t}+tbx^{n+t}+\dots sKx^{s+t}+tKx^{s+t})$$

das x^t wurde eben in die Parenthese gebracht

Vollkommen ist durch die Bemerkung zu [illegible] zu sehen was auch schon wurde. Folgt wenn fey, daß der Satz für r Glieder gilt, man er wieder fortbringt ist: hier also für $r = 2$.
Weit kürzer und deutlich ist der analytische Beweis von mir p. 154.

$E.\,2Alx^t = 2lx^t(o\alpha x^0 + t\alpha x^0 + max^m + tax^m + nbx^n + tbx^n + \ldots 5Kx^5 + tKx^5)$

Nach den Gliedern mit und ohne t geordnet.

ist:

$$E.\,2Alx^t = 2lx^t\begin{pmatrix} 0.\alpha x^0 + max^m + nbx^n + \ldots + 5Kx^5 \\ t\alpha x^0 + tax^m + tbx^n + \ldots + tKx^5 \end{pmatrix}$$

$$E.\,2Alx^t = 2lx^t\left[(o\alpha x^0 + max^m + nbx^n + \ldots 5Kx^5) + t(\alpha x^0 + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5)\right] =$$

= dem Exponentiale des 2ten Gliedes in d. Gleichung ✝.

Das Exponentiale des 3ten Gliedes in ✝.

$E.\,l^2x^{2t} = 2tl^2x^{2t} = 2tlx^t \times lx^t;$

diese 3 entwickelten Werthe der Gleichung ✝ nun zusammengesetzt geben:

$$E.(A+lx^t)^2 = 2(\alpha + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5).(o\alpha + max^m + nbx^n + \ldots 5Kx^5) +$$
$$+ 2lx^t(o\alpha + max^m + nbx^n + \ldots 5Kx^5) + 2tlx^t(\alpha + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5)$$
$$+ 2tlx^t \times lx^t;$$

Das ist nun da A = r Glieder war, das Exponentiale von einer $(r+1)$ gliedrigen Funktion da noch das Glied lx^t hinzu gekommen war.

Zur bequemeren Uebersicht setze in obiger Gleichung:

$\alpha + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5) = B$

$o\alpha + max^n + nbx^n + \ldots 5Kx^5) = C$ so ist:

$$E.(A+lx^t)^2 = 2BC + 2lx^tC + 2tlx^tB + 2tlx^t.lx^t; =$$

$$2C(B+lx^t) + 2tlx^t(B+lx^t) = 2(B+lx^t).(C+tlx^t);$$

Setzt man nun für A, so wie für die hier angenommenen Buchstaben B u. C ihre Werthe so ist in Gleichung ✝:

$$\mathcal{E}^{\cdot}\left[\left(\alpha + ax^m + bx^n + \dots Kx^s\right) + Lx^t\right]^2 = 2\left[\left(\alpha + ax^m + bx^n + \dots Kx^s\right) + Lx^t\right]\cdot\left[\left(0\alpha + max^m + nax^n + sKx^s\right) + tLx^t\right]$$

dieses Gesetzt wird wir nun ebenfalls wie die 2, 3 und r gliedrigen Funktion entwickelten finden wir nun auch hier an der $(r+1)$ gliedrigen bestätigt, da es die r gliedrige Funktion wahr war die Function 2 mal und x giebt, das ist den Exponentiale der Regel. Das ist auch hier der Fall, und es bleibt nur noch zu beweisen daß das was hier vom Quadrate gilt, auch für jeden unbestimmten Exponenten m und denn für $(m+1)$ gilt.

Seite 189. Zusatz I.

Wenn X und Z, zwey Funktionen von einerley Art sind, so ist sowohl ihre Summe als ihre Differenz also $(X+Z)$ u. $(X-Z)$ eine Funktion von einerley Art, und also ist auch $\mathcal{E}^{\cdot}(X+Z)^2 = 2(X+Z)\times\mathcal{E}^{\cdot}(X+Z)$ und

völlig verkürzt $Z = \alpha + ax^m + bx^n + \dots px^0 = A + px^0$ | $A = \alpha + ax^m + bx^n + \dots$; $\mathcal{E}A = amx^m + bnx^n + \dots$

$Z^2 = (A+px^0)^2 = A^2 + 2Apx^0 + p^2x^{20}$

$\mathcal{E}Z^2 = \mathcal{E}A^2 + \mathcal{E}.2Apx^0 + \mathcal{E}.p^2x^{20}$

$\mathcal{E}A^2 = 2A.\mathcal{E}A$ [A ist nur eine Funct. eingeschlossen]

$\mathcal{E}.p^2x^{20} = 20p^2x^{20}$

$\mathcal{E}.2Apx^0 = \mathcal{E}2(\alpha + ax^m + bx^n + \dots)px^0$

$= \mathcal{E}2(\alpha px^0 + apx^{0+m} + bpx^{0+n} + \dots)$

$= 2(\alpha 0 px^0 + (0+m)apx^{0+m} + (0+n)bpx^{0+n} + \dots)$

$= 2px^0(\alpha 0 + (0+m)ax^m + (0+n)bx^n + \dots)$

$= 2px^0(\alpha 0 + a0x^m + amx^m + b0x^n + nbx^n + \dots)$

$= 2px^0[(\alpha + ax^m + bx^n)0 + (amx^m + nbx^n + \dots)]$

$= 2px^0(A0 + \mathcal{E}A)$

$= 2px^0A0 + 2px^0\mathcal{E}A$

$\mathcal{E}Z^2 = 2A.\mathcal{E}A + 2px^0A0 + 2px^0\mathcal{E}A + 20p^2x^{20}$

$\mathcal{E}Z^2 = (2A + 2px^0)\mathcal{E}A + (2A + 2px^0)0px^0$

$\mathcal{E}Z^2 = (2A + 2px^0)(\mathcal{E}A + 0px^0)$

$\mathcal{E}Z^2 = 2Z.\mathcal{E}Z$

$$E.(X-Z)^2 = 2(X-Z) \times E.(X-Z);$$

denn es sey.

$$Z = 1 + \alpha x^m + \beta x^n + \gamma x^p + \ldots$$

$$X = 3 + a x^m + b x^n + c x^p + \ldots$$

so ist $(Z+X) = (3+1) + (\alpha+a)x^m + (\beta+b)x^n + (\gamma+c)x^p + \ldots$

und $(X-Z) = (3-1) + (a-\alpha)x^m + (b-\beta)x^n + (c-\gamma)x^p + \ldots$

beide Funktionen von derselben Form.

Daher das oben gesagte richtig.

Zusatz 2.

Wenn man das Exponentiale der Summe (algebraische Summe d.h. $(a+b)$ oder $(a-b)$) nehmen soll, so ist es gleichgültig ob ich die Exponentiale der einzelnen Funktionen nehme und dann addire, oder ob ich gleich das Exponentiale der Summe nehme.

Denn indem ich ~~nach~~ exponentiire multiplicire ich ja nur die Exponenten die doch hier gleich~~namig~~ sind in den gleichnamigen Gliedern, die Coefficienten der Funktionen. x erscheint also in beiden Fällen bei den Coefficienten als Faktor, denn:

$$\varepsilon . X = max^m + nbx^n + pcx^p$$

$$\varepsilon . Z = m\alpha x^m + n\beta x^n + p\gamma x^p$$

$$\varepsilon . X + \varepsilon . Z = m(a+\alpha)x^m + n(b+\beta)x^n + p(c+\gamma)x^p$$ und

aber so ist doch

$$\varepsilon (X+Z) = m(a+\alpha)x^m + n(b+\beta)x^n + p(c+\gamma)x^p;$$

Zusatz 3.

Aus dem vorigen Zusatz leitet man d. Wh. diese Regel ab für das Produkt zwo gleichartigen Functionen: nämlich:

$$\varepsilon . (X+Y)^2 = 2(X+Y) . \varepsilon (X+Y) = 2(X+Y) . (\varepsilon . X + \varepsilon . Y);$$ verrichtet man die Multiplication wirklich so ist:

$$\varepsilon . (X+Y)^2 = 2X \varepsilon . X + 2X \varepsilon . Y + 2Y \varepsilon . X + 2Y \varepsilon . Y; \ldots\ldots \text{A.}$$

So ist ferner:

$$\varepsilon . (X-Y)^2 = 2(X-Y) \times \varepsilon . (X-Y) = 2(X-Y) \times (\varepsilon X - \varepsilon Y)$$

verrichtet man auch hier d. Multiplication so ist.

$$\varepsilon (X-Y)^2 = 2X \varepsilon . X - 2Y \varepsilon . X - 2X \varepsilon . Y + 2Y . \varepsilon . Y; \ldots\ldots \text{B.}$$

Wenn man aber nimmt.

$$(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2 = 4XY$$ so ist:

$$XY = \tfrac{1}{4}(X+Y)^2 - \tfrac{1}{4}(X-Y)^2$$ und: $$\varepsilon . XY = \tfrac{1}{4}\varepsilon . (X+Y)^2 - \tfrac{1}{4}\varepsilon . (X-Y)^2$$

und $$4 \varepsilon . XY = \varepsilon . (X+Y)^2 - \varepsilon (X-Y)^2 \ldots\ldots \text{C.}$$

die Funktionen $\mathcal{E}x$ u. $\mathcal{E}y$ subtrahirt.

$$\mathcal{E}(X+Y)^2 = 2X\mathcal{E}.X + 2X\mathcal{E}.Y + 2Y\mathcal{E}.X + 2Y\mathcal{E}.Y$$

$$\pm\mathcal{E}(X-Y)^2 = \pm 2X\mathcal{E}.X \mp 2Y\mathcal{E}.X \mp 2X\mathcal{E}.Y \pm 2Y\mathcal{E}.Y$$

$$\mathcal{E}.(X+Y)^2 - \mathcal{E}(X-Y)^2 = 4.\mathcal{E}.XY = 4Y\mathcal{E}.X + 4X\mathcal{E}.Y \text{ und } \mathcal{E}^0.$$

also:

$$\mathcal{E}.XY = Y\mathcal{E}.X + X\mathcal{E}.Y.$$ (Differenzl. $duv = udv + vdu$)

Wenn also eine Funktion eines Produkts bestimmt werden soll, so multiplicirt man jede Funktion gegenseitig mit dem Exponentiale der andern, und addirt diese Produkte.

Diese Regel wird in d. Folge zum Beweise d. Binoms gleich angewandt werden, jetzt muß nun nachgewiesen werden daß:

§ 82. Lehrsatz

$\mathcal{E}.Z^m = m.Z^{m-1} \times \mathcal{E}.Z$ ist wo Z irgend eine Funktion bedeutet.

Beweis. Wir nehmen vorläufig an d. Satz habe seine Richtigkeit für eine gewisse Dignität n und trachten ihn dann für $(n+1)$ Stelle so kann n nun noch so groß(+) Zahl seyn, weil man

Quadrate es gilt. Setzen wir daher $n = 2$ so ist $(n+1) = 3$ d. h. es wenn es für $(n+1)$ auch gilt.

Wir nehmen also an es gelte für eine Dignität n wahr sey:

$$\mathcal{E}.z^n = n z^{n-1}.\mathcal{E}.z$$ und suchen daraus ob es

auch $\mathcal{E}.z^{n+1} = (n+1) z^n.\mathcal{E}.z$ sey.

$z^{n+1} = z^n . z$ daher

$\mathcal{E}.z^{n+1} = \mathcal{E}.z^n.z$ hier die Regel vom Producte angewendet:

$\mathcal{E}.z^{n+1} = z\mathcal{E}.z^n + z^n\mathcal{E}.z$; für $\mathcal{E}.z^n$ das Exponentiale genommen, ist:

$\mathcal{E}.z^{n+1} = z.nz^{n-1} \times \mathcal{E}z + z^n\mathcal{E}.z$;

$\mathcal{E}.z^{n+1} = nz^{n-1+1} \times \mathcal{E}z + z^n\mathcal{E}.z = nz^n.\mathcal{E}z + z^n\mathcal{E}.z$ daher

$\mathcal{E}z^{n+1} = z^n\mathcal{E}.z(n+1)$ und hieraus schließen wir nun daß da es vom Quadrat wahr ist, es auch für jede ganze + auch so große Potenz gilt.

2) Sey $m = +\frac{u}{v}$.

so muß also seyn.

$$\mathcal{E}.z^{\frac{u}{v}} = \frac{u}{v} z^{\frac{u}{v}-1} \times \mathcal{E}.z.$$

Um dies zu beweisen setze man $z^{\frac{u}{v}} = y$

und da u und v beides positive Zahlen sind so ist

auch $y^v = z^u$ und $\mathcal{E}.y^v = \mathcal{E}.z^u$. das Differential genommen so ist

denn $z^{\frac{u}{v}} = y$

$\sqrt[v]{z^u} = y \quad \left(\sqrt[v]{z^u}\right)^v = y^v$

$z^u = y^v$

$$v y^{v-1} . \mathcal{E}.y = u z^{u-1} \times \mathcal{E}.z$$

$$\mathcal{E}.y = \frac{u z^{u-1} . \mathcal{E}.z}{v y^{v-1}} \text{ ---------- } \alpha$$

Es war angenommen $y = z^{\frac{u}{v}}$

$$y^v = z^u$$

$$\frac{y^v}{y} = \frac{z^u}{z^{\frac{u}{v}}}$$

$$y^{v-1} = z^{u-\frac{u}{v}}$$ diesen Werth in α

für y^{v-1} gesetzt. so ist.

$$\mathcal{E}.y = \frac{u z^{u-1} . \mathcal{E}.z.}{v z^{u-\frac{u}{v}}}$$

$$\mathcal{E}.y = \frac{u}{v} z^{u-1-u+\frac{u}{v}} \times \mathcal{E}.z = \frac{u}{v} z^{\frac{u}{v}-1} . \mathcal{E}.z.$$

und endlich $\mathcal{E}z^{\frac{u}{v}} = \frac{u}{v} z^{\frac{u}{v}-1} \times \mathcal{E}.z$ q.e. dem: erat.

Nun haben wir also die Richtigkeit für ganze + und gebrochene Zahlen bewiesen. Wir dürfen also nur noch für − Zahlen beweisen und dann gehen die − gebrochenen Exponenten als

bewiesen annehmen wenn wir $-n = -\frac{u}{v}$ setzen

kann.

3) Es sey also $n = -n$ so ist

Th: $\mathcal{E}.z^{n} = -nz^{-n-1} \times \mathcal{E}.z$

~~Viel einfacher ist der Beweis~~

~~$\mathcal{E}z^{-n} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{\mathcal{E}.z^n} = \frac{1}{nz^{n-1}.\mathcal{E}z} = -nz^{-}$~~

Es ist aber.

$$z^{2n}.z^{-n} = z^{n}$$

$$\mathcal{E}z^{2n}.z^{-n} = \mathcal{E}.z^{n}$$

Daher weil ist der Ausdruck $z^{2n}.z^{-n}=z^{n}$ gewählt, dann Exp: wenn ich kommt in die Gl: nur ein $\mathcal{E}z^{-n}$ vor, und kann daraus bestimmt werden – Es sei auch $z^{-n-a}.z^{a}=z^{-n}$

so ist $\mathcal{E}z^{-n-a}.z^{a} = \mathcal{E}z^{-n}$

$z^{-n-a}.\mathcal{E}z^{a} + z^{a}.\mathcal{E}z^{-n-a} = \mathcal{E}z^{-n}$

$z^{-n-a}.az^{a-1}.\mathcal{E}z + z^{a}\mathcal{E}z^{-n}.z^{-a} = \mathcal{E}z^{-n}$

$z^{-n-a}.az^{a-1}.\mathcal{E}z + z^{a}.z^{+n}.\mathcal{E}z^{-a} + z^{a}.z^{-a}.\mathcal{E}z^{-n} = \mathcal{E}z^{-n}$

$z^{-n-a}az^{a-1}\mathcal{E}z + z^{-n+a}.z^{-a}\mathcal{E}z = 0$

$\mathcal{E}z^{-a} = -z^{-n-a}.a.z^{a-1}.z^{n-a}.\mathcal{E}z$

$\mathcal{E}z^{-a} = -az^{-a-1}.\mathcal{E}z$

$$z^{2n}.\mathcal{E}z^{-n} + z^{-n}.\mathcal{E}.z^{2n} = nz^{n-1} \times \mathcal{E}.z$$

$$z^{2n}.\mathcal{E}z^{-n} + z^{-n}.2nz^{2n-1}.\mathcal{E}.z = nz^{n-1}.\mathcal{E}.z$$

$$z^{2n}.\mathcal{E}.z^{-n} = nz^{n-1}.\mathcal{E}.z - z^{-n}.2nz^{2n-1}.\mathcal{E}z \quad \varphi$$

Die Gl. φ mit z^{2n} dividirt und die Expon: bei der Divis. abgezogen:

$\mathcal{E}.z^{-n} = (nz^{-n-1} - 2nz^{-n-1})\mathcal{E}z$

$= -nz^{-n-1}.\mathcal{E}z$

~~$$z^{2n} \times \mathcal{E}.z^{-n} = nz^{n-1}.\mathcal{E}.z - 2nz^{n-1}\,\mathcal{E}.z$$~~

~~$$z^{2n} \times \mathcal{E}.z^{-n} = -nz^{n-1}\mathcal{E}.z.$$~~

~~$$\mathcal{E}.z^{-n} = \frac{-nz^{n-1}\mathcal{E}.z}{z^{2n}} = -nz^{n-1-2n}\,\mathcal{E}.z =$$~~

~~$$\mathcal{E}z^{-n} = -nz^{-n-1}\,\mathcal{E}.z. \text{ q. d. erat.}$$~~

Es mag also n eine ganze oder gebrochene positive od. negative Zahl seyn so ist der Satz

Satz:

$$E.Z^m = mZ^{m-1} \times E.Z$$

jederzeit wahr.

Das wir nun ein Theil des Beweises vom Binomisch Lehrsatze, ein 2ter Theil folgt, und als Vorbereitung, Satz nimmt d. Verfasser an:

§ 83. Lehrsatz.

Wenn eine Funktion $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ — $Px^r + Qx^{r+1} + \ldots\ldots Zx^m = 0$ ist, bey jeglichem Werthe von x, auch $x = 0$ so müssen die Koeffizient A, B, C, D, etc. immer gleich Null seyn.

Denn wenn $x = 0$ ist so sind alle Glieder außer $A, = 0$ und da die ganze Funktion $= 0$ ist so ist es auch A. Durch den B eingeschlossen dividirt man die ganze Funkt. durch x so erscheint B auch ohne x und daher auch $= 0$ u. s. w.

Wenn 2 Funktionen wie $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$ $= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$ sind, so ~~fol~~ können wir auf zweierley Art auf die Verschiedenheit der Koeffizienten schließen

setzen wir beide Funct. der Gleichung auf 0
bringen so ist es dann

$$\left.\begin{matrix} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \\ -a - bx - cx^2 - dx^3 - \ldots \end{matrix}\right\} = 0$$ und dieses

muß und dann wenigen $A - a = 0$ $B - b = 0$
u. s. w. seyn.

2) Übersetzung kann man gleich so schließen:
wenn 2 Funct. von einerlei Form einander
gleich seyn sollen, d. i. auch Grunde = sind, so
haben aber diejenigen Glieder welche gleiche Dignitaet
der veränderlichen Größe enthalten verschiedene
und gehörigen Koeffizienten, so müssen auch diese
einander gleich seyn.

daher gleich der Schluß, bei obigen Functionen
$A = a$ $B = b$ $C = c$ u. s. w.

Sollen ferner 2 Functionen von einerley
Form mit verschiedener Anzahl der
Glieder einander gleich seyn, so kann das
nur unter der Bedingung geschehen daß, die
Ueberschüsse der Glieder von der längern Function
alle $= 0$ seyn müssen.

z. B. bei $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = a + bx$

$+cx^2+dx^3+ex^4+ \dots zx^m$ muß $A=a$, $B=b$.
$C=c$, $D=d$, $E=e$ seyn die übrigen Glieder
aber der 2te Function bis zx^m müssen $=0$ seyn.
Solche Entwickelung der Koeffizient kennen wir in
der Anwendung erst nur.

§84. Seite 196. Aufgabe.

Dies ist nun der Beweis des vorigen Abschnittes
die $m$te Potenz von $a+b$ zu finden, es mag m nun
ganze oder gebrochene $+$ oder negative Zahl seyn.

Um das zu besorgen, und es auf den Exponentiale
entwickeln zu können muß man den Ausdruck
$(a+b)$ etwas umformen, um eine Funct. zu erhalten
die sich mit 1. anfängt so wie wir sie immer bis
jetzt behandelt haben. Wir setzen daher.

$$a+b = a + \frac{ab}{a} = a\left(1+\frac{b}{a}\right) \text{ also}$$

$$(a+b)^m = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^m = a^m \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^m.$$

der Kürze wegen setze man $\frac{b}{a} = x$ und also

$$(a+b)^m = (1+x)^m \cdot a^m.$$

Obgleich man unter x eine unveränderliche Größe gewöhnlich versteht, so ist es hier doch nicht [illegible] denn b u. a kann sich ja auch ändern.

Der der Bildung einer Function für gewisse Größen

$(1+x)^m = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\dots+Px^{r-1}+Qx^r+Rx^{r+1}$ Die Gl: exponent [illegible]

$m(1+x)^{m-1} \cdot = A+2Bx+3Cx^2+\dots+(r-1)Px^{r-2}+rQx^{r-1}+(r+1)Rx^r$ [illegible]

$m(1+x)^m = \left\{ \begin{array}{l} A+2Bx+3Cx^2+\dots+(r-1)Px^{r-2}+rQx^{r-1}+(r+1)Rx^r \\ +Ax+2Bx^2+3Cx^3+\dots+(r-1)Px^{r-1}+rQx^r \end{array} \right.$ [illegible]

$= A+(2B+A)x+(3C+2B)x^2+\dots+(rQ+(r-1)P)x^{r-1}+((r+1)R+rQ)x^r$ [illegible]

$m(1+x)^m = m+mAx+mBx^2+mCx^3+\dots+mPx^{r-1}+mQx^r$ [illegible]

Anwend. der Coeff. Gl.

$rQ+(r-1)P = mP$
$Q = \frac{mP-(r-1)P}{r} = \frac{[m-(r-1)]P}{r}$

$(r+1)R+rQ = mQ$
$R = \frac{mQ-rQ}{r+1} = \frac{(m-r)Q}{r+1} = \frac{(m-r)(m-(r-1))P}{r(r+1)}$

$A = m$
$2B+A = mA$
$B = \frac{mA-A}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$
$3C+2B = mB$
$C = \frac{mB-2B}{3} = \frac{(m-2)B}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}$

muß man die Funktion jederzeit so einrichten daß unter gewissen besondern Fällen die Funktion richtig sey.

In diesem Falle $(1+x)^m$ muß also nothwendig die Funktion mit 1 anfangen denn für $x = 0$ ist alsdann $1 = 1$. daher also werden wir setzen:

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots Px^{r-1} + Qx^r + Rx^{r+1} + \ldots = Z$$

Sind wir nun im Stande nach dieser angenommenen Funktion die Koeffizienten A, B, C, D, etc. zu entwickeln, ohne auf Widersprüche und Unmöglichkeiten zu stoßen, so ist die angenommene Form der Funktion richtig, wo nicht so ist es eine andere.

Es sey nun also:

Dieses verdunkelt den Begriff - Cf. p. 163.

$(1+x) = y$ und $(1+x)^m = y^m$. daher also

$y^m = Z$.

Hieraus ist nun

$E.y^m = E.Z$;

$my^{m-1} \times E.y = E.Z$,

$\frac{my^m}{y} \times E.y = E.Z$.

$my^m \times E.y = yE.Z$. statt y^m den Werth Z

Es ist, $mZ\,E.\,y = y\,E.\,Z. \text{———} \Phi$

Wir haben uns also hier mit der Beschreibung dieser Function zu thun, und wissen daß für jede Gattung des Exponent m, die Exponentiale mithin auch obige Gleichung richtig seyn.

Vorausgesetzt ist:

$$mZ = m + mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + \ldots\ldots mPx^{r-1} + mQx^r + mRx^{r+1} + \ldots\ldots$$

$$E.\,y = x.$$

---

x giebt es ist

$$mZ\,E.\,y = mx + mAx^2 + mBx^3 + mCx^4 + mDx^5 + \ldots\ldots\ mPx^r + mQx^{r+1} + mRx^{r+2} + \ldots\ldots \;\Omega$$

Von 2ten Theile der obigen Gleichung Φ. ist

$$E.\,Z = Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \ldots\ldots (r-1)Px^{r-1} + rQx^r + (r+1)Rx^{r+1} + \ldots$$

$$y = 1 + x.$$

$$y\,E.\,Z = Ax + \left.\begin{matrix}2B\\A\end{matrix}\right|x^2 + \left.\begin{matrix}3C\\+2B\end{matrix}\right|x^3 + \left.\begin{matrix}4D\\+3C\end{matrix}\right|x^4 + \ldots + \left.\begin{matrix}(r-1)P\\ \cdot\end{matrix}\right|x^{r-1} + \left.\begin{matrix}rQ\\(r-1)P\end{matrix}\right|x^r + \left.\begin{matrix}(r+1)R\\+rQ\end{matrix}\right|x^{r+1} + (r+1)R\Big|x^{r+2} \;\Omega$$

Es ist also $\Omega = \Omega$. mithin

$$m = A.$$

$$2B = mA - A, \quad B = \frac{A(m-1)}{2}$$

$$3C + 2B = mB; \quad 3C = mB - 2B; \quad C = \frac{B(m-2)}{3}$$

$$4D + 3C = mC; \quad 4D = mC - 3C; \quad D = \frac{C(m-3)}{4}$$

$$\vdots$$

$$rQ + (r-1)P = mP; \quad rQ = mP - (r-1)P; \quad Q = \frac{P.\,m-(r-1)}{r}$$

$$(r+1)R + rQ = mQ; \quad (r+1)R = mQ - rQ; \quad R = \frac{Q(m-r)}{r+1}$$

und so erhalten wir hierdurch eine Recurrirende Reihe. d.h. eine solche wo jede Größe od. Glied derselben nur von einem oder mehreren vorhergehenden Gliedern abhängig ist, also durch die vorhergehenden Gliedern bestimmt wird.

Nimt man nun also in

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots + Px^{r-1} + Qx^r + Rx^{r+1},$$

den A gleich m ist die Werthe für A, B, C, D, u.s.w. so ist

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.m-1}{1.2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}x^4 + \ldots\ldots + P.\frac{m-(r-1)}{r}x^r + Q\frac{(m-r)}{r+1}x^{r+1} + \ldots\ldots$$

setzt man ferner für x den Werth $\frac{b}{a}$ so ist

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = 1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m.m-1}{1.2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4} + \ldots\ldots P.\frac{m-(r-1)}{r}\frac{b^r}{a^r} + Q\frac{(m-r)}{r+1}\frac{b^{r+1}}{a^{r+1}} + \ldots\ldots$$

multiplizirt man mit a^m so ist

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.\ldots m-3}{1.2.\ldots 4}a^{m-4}b^4 + \ldots + \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots m-(r-1)}{1.2.\ldots\ldots r}a^{m-r}b^r + \frac{m.m-1.\ldots\ldots m-r}{1.2.\ldots(r+1)}a^{m-(r+1)}b^{r+1} + \ldots\ldots$$

und hieraus also ist es klar daß der vorige Abschnitt nur wie den Binomischen Lehrsatz

für jegliche Zahl von m zu behandeln annehmen,
richtig ist.
Was nun nachfolgende betrifft den 2ten Theil dieses
Abschnitts, so wie es im Titel genannt wurde, nämlich
die Anwendung des Lehrsatzes auf die (Entwickelung)
Erfindung der unbestimmten Potenz, jeder ohne Ende
fortlaufenden Funktion.

§ 85.

In der höheren Analysis kommt es vor daß man
mehrnamige Größen, und vorzugsweise 3theilige
Größen auf höhere Potenzen zu erheben hat, und
hievon soll jetzt gehandelt werden.
Es soll also von einer Funktion

$$y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots$$

die $m$te Dignität bestimmt werden.
Auch hier kommt es nun darauf an eine Form der
zu suchenden Funktion festzusetzen daß bei jedem
Werth von x die Funktion richtig sey, und
nothwendig muß nun auch hier für $x = 0$ die
Funktion mit 1. anfangen.
Da die Funktion ohne Ende fortgeht, so hat sie
eine unbestimmte Form, will ich sie aber y f

bestimmt haben z. B. 4 gliedrig so setze ich $\delta = 0$

$\varepsilon = 0$ u. s. w. Will ich sie 2 theilig haben so setze

ich $\beta = 0$.

Nun ist es aus aus dem Obigen bekannt daß eine 2 theilige Funktion $(1 + \alpha x)$ zu einer $m$ten Potenz erhoben mit 1. anfängt und dann mit in ihr die Exponenten von x immer um 1 steigen. Wenn man daher die obigen vieltheilige Funct: gött y so muß du auch mit ihr machen also setzen können, 1 anfangenes, weil $y^m = [1 + (\text{vieltheilig})]^m$ mit 1 anf.

$$y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots\ldots = z$$

Nun müssen die Coeff: A B C bestimmt werden, also sind beide Reihen der Coeff: Exponenten auf = Form gebracht, und die Coeff: = angesetzt.

Jetzt wissen wir daß:

$$E.y^m = E.z$$

$$m.y^{m-1}.E.y = E.z$$

$$my^m E.y = yE.z \quad \text{für } y^m \text{ den Werth } z.$$

$$mz\,E.y = yE.z$$

und x weil es in beiden Funktionen gemeinschaftlicher Faktor ist, die Funktionen bequemer zu machen, herausgeschafft ist

$$\frac{mz\,E.y}{x} = \frac{yE.z}{x^2} \;\text{———}\; \Phi$$

Entwickelt man auch hier wiederum diese beiden Theile der Gleichung Φ, so ist der erste Theil d. Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathcal{E}.Y}{x} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + 6\zeta x^5 + \ldots\ldots \\ {}^{\wedge} mZ = m + mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + mEx^5 + mFx^6 + \ldots \end{array}\right\} \text{multiplicirt}$$

$$\frac{\mathcal{E}.YmZ}{x} = \left.\begin{array}{l|l|l|l|l|l} m\alpha + & 2m\beta & + 3m\gamma & + 4m\delta & + 5m\varepsilon & + 6m\zeta \\ & \alpha mA \; x & + 2m\beta A \; x^2 & + 3\gamma mA \; x^3 & + 4\delta mA \; x^4 & + 5\varepsilon mA \; x^5 + \\ & & + \alpha mB & + 2\beta mB & + 3\gamma mB & + 4\delta mC \\ & & & + \alpha mC & + 2\beta mC & + 3\gamma mC \\ & & & & + \alpha mD & + 2\beta mD \\ & & & & & + \alpha mE \end{array}\right\} = Q_x$$

und der 2te Theil von d. Gleichung Q. in $\dfrac{Y\mathcal{E}.Z}{x}$ ist:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathcal{E}.Z}{x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + \ldots\ldots \\ Y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{multiplicirt}$$

$$\frac{\mathcal{E}.ZY}{x} = \left.\begin{array}{l|l|l|l|l|l} A + & 2B \; x & + 3C \; x^2 & + 4D \; x^3 & + 5E \; x^4 & + 6F \; x^5 + \ldots \\ & + \alpha A & + 2\alpha B & + 3\alpha C & + 4\alpha D & + 5\alpha E \\ & & \beta A & + 2B\beta & + 3\beta C & + 4\beta D \\ & & & + \gamma A & + 2\gamma B & + 3\gamma C \\ & & & & + \delta A & + 2\delta B \\ & & & & & + \varepsilon A \end{array}\right\} = Q_x$$

Da nun hier $Q_x = Q_x$ ist so ist also auch:

$A = m\alpha$

$2B + \alpha A = 2m\beta + \alpha mA$; $B = \dfrac{2m\beta + \alpha mA - \alpha A}{2}$; $B = \dfrac{\alpha A(m-1) + 2m\beta}{2}$.

$3C + 2\alpha B + \beta A = 3m\gamma + 2m\beta A + \alpha mB$; $3C = 3m\gamma + 2m\beta A + \alpha mB - 2\alpha B + \beta A$

und $\mathfrak{C} = \dfrac{3m\gamma + B\alpha(m-2) + \beta A(2m-1)}{3}$; ferner ist $4D + 3\alpha C + 2B\beta + \gamma A = 4m\delta +$ $+ 3\gamma mA + 2\beta mB + \alpha mC$; $4D = 4m\delta + 3\gamma mA + 2\beta mB + \alpha mC - 3\alpha C - 2B\beta - \gamma A$; und

$$\mathfrak{D} = \frac{(m-3)\alpha\mathfrak{C} + (2m-2)\beta\mathfrak{B} + (3m-1)\mathfrak{A}\gamma + 4m\delta}{4}$$

hieraus lässt sich nun die folgenden Koeffizienten leicht entwickeln; da

$$\mathfrak{E} = \frac{(m-4)\alpha\mathfrak{D} + (2m-3)\beta\mathfrak{C} + (3m-2)\gamma\mathfrak{B} + (4m-1)\delta\mathfrak{A} + 5m\varepsilon}{5}.$$

Jeder folgende Koeffizient ist also abhängig von allen vorhergehenden, und es kommt nun darauf an die Eigenthümlichkeit jedes unbestimmten Koeffizienten zu entwickeln.

Wenn man diese entwickelten Koeffizienten genau betrachtet, so findet man bey ihnen folgende Gesetze.

1) der Koeffizient jedes Gliedes der verlangten Potenz y^m ist durch alle Koeffizienten der vorhergehenden Glieder von y^n bestimmt: er ist ein Bruch, dessen Zähler aus so viel Theilen besteht, als der Nenner Einheiten hat.

2). der Nenner ist allemal eine Zahl welche anzeigt, von dem wie vielten Koeffizienten die Rede ist.

3). In jedem Theile des Zählers wenn man seine Theile von der rechten gegen die Linke zu zählt, ist der Exponent m der verlangten Potenz von y mit derjenigen Zahl multiplizirt, welche die Stelle desselben Theiles im Zähler anzeigt, und vom Produkt ist die Zahl

abgezogen, um welche jene Zahl von Einer (?) überstiegen wird, so ist der Rest mit dem Koeffizienten desjenigen Gliedes von der Funktion $y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$, dessen Stelle durch die um m multiplizirte Zahl, angezeigt ist, zu und mit dem Koeffizienten desjenigen Gliedes der Potenz $y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ multiplizirt, dessen Stelle die von m abgezogene Zahl anzeigt.

Um nun bei einem allgemeinen n^{te} Gliede das Gesetz zu entdecken setzen wir in d. F. y, die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, u.s.f. $\overset{I}{\lambda}, \overset{II}{\lambda}, \overset{III}{\lambda}, \overset{IV}{\lambda} \ldots \overset{r}{\lambda}, \overset{r+1}{\lambda}$, und eben so in F. y^m, die Koeffizienten A, B, C, D, E, u.s.w. $\overset{I}{L}, \overset{II}{L}, \overset{III}{L}, \overset{IV}{L}, \overset{V}{L} \ldots \overset{r}{L}, \overset{r+1}{L}$, wo die Römischen Zahlen die Ordnung bezeichnen (?) sind.

Hiernach ist also allgemein:

$$y = 1 + \overset{I}{\lambda} x + \overset{II}{\lambda} x^2 + \overset{III}{\lambda} x^3 + \overset{IV}{\lambda} x^4 + \ldots \overset{r}{\lambda} x^r + \overset{r+1}{\lambda} x^{r+1} + \ldots$$
$$\overset{n-r+1}{\lambda} x^{n-r+1} + \ldots + \overset{n-1}{\lambda} x^{n-1} + \overset{n}{\lambda} x^n + \overset{n+1}{\lambda} x^{n+1} + \ldots$$
$$y^m = Z = 1 + \overset{I}{L} x + \overset{II}{L} x^2 + \overset{III}{L} x^3 + \ldots \overset{r}{L} x^r + \overset{r+1}{L} x^{r+1} + \ldots$$
$$\overset{n-r+1}{L} x^{n-r+1} + \ldots \overset{n-1}{L} x^{n-1} + \overset{n}{L} x^n + \overset{n+1}{L} x^{n+1} + \ldots$$

wo nämlich das r^{te} Glied und das $(n-r+1)^{te}$ Glied gleich weit
$[n-(r-1)]$

so dann angenommen $r = 5$, so ist $\overset{r}{\lambda} x^r$ das 6te Glied vom Anfange ab, dann ist $L^{n-(r-1)}$ auch das 6te vom Ende denn es ist $= L^{n-4}$ und es folgen — L^{n-3}, L^{n-2}, L^{n-1}, L^{n}, L^{n+1} aber das hat keinen Einfluss auf das Fortgehen (?) der Reihe. —

Nemlich (n−r) und r sind nicht Exponenten, sondern Ordnungszeiger, um anzuzeigen aus welchem Gliede der Reihe der Coefficient genommen werden soll.

am Anfange und sind nach der Mitte zu aufsteigend sind. (p 171)

λ ist Coeff der Reihe $y = 1+\alpha x+\beta x^2+\ldots$

λ^r zeigt den Coefficienten des r^ten Gliedes der Reihe (1 nicht mitgenommen)

L ist Coeff der Reihe $y^m = 1+Ax+Bx^2+\ldots$

L^{n-r} ist der Coeff: des $(n-r)^{ten}$ Glieds der Reihe

diesen beiden Coeff: ihr Product müssen sich in ihrer Ordnungszahl nach ergänzen

Eigenen Coeff: der ist immer

rm − einer Zahl die um r kleiner ist

als der Nenner, hier also rm−(n−r)

(n−r) giebt immer die Ordnungszahl

von L und r die von λ.

daraus ist der Coeff L^n zu bestimmen

Nach den hier ad Seite 170. (1. 2. 3) angestellten Untersuchungen, so könnte man den Coefficienten eines n^ten Gliedes $\overset{n}{L} x^n$ schon bestimmen, indem man weiß, daß der Nenner des Coefficienten $\overset{n}{L}$, n seyn muß, und daß jeder r^te Theil des Zählers genau durch: $(rm-(n-r))\, L^{n-r} \lambda^r$ ausgedrückt wird, und man erhielte daraus den 1ten 2ten 3ten u.s.w. Theil, wenn man für r = 1, 2, 3 etc. setzt. also

$$L^n = \frac{(m-(n-1))\, L^{n-1} \lambda^{I} + (2m-(n-2))\, L^{n-2} \lambda^{II} + (3m-(n-3))\, L^{n-3} \lambda^{III} + \ldots\ldots + (rm-(n-r))\, L^{n-r} \lambda^{r} + \ldots}{n}$$

Beweisen wir nun daß diese Formel für das n^te Glied von Z. y^n richtig sey, und daß das (n+1)^te Glied demselben Gesetze unterworfen sey, so ist die Formel richtig.

Deshalb nehmen wir in der Gleichung von hier Seite 168: $\frac{mZ\,E.y}{x} = \frac{y\,E.Z}{x}$ ——— und entwickeln hierin die Werthe für Z y etc. so erhalten wir zusammengesetzt, wenn wir die Multi- gli

gliedern verrichten, und zwar so verrichten daß wir nur den n^{te} Potenz von x erhalten, weshalb wir wie folgt, die beiden zu multiplizirenden Dividenden, verkehrt unter einander schreiben, so:

$$\frac{m\mathcal{E}.y}{x} = m\overset{I}{\lambda} + 2m\overset{II}{\lambda}x + \dots\dots r m\overset{r}{\lambda}x^{r-1} + (r+1)m\overset{r+1}{\lambda}x^{r} + \dots\dots (n-r+1)m\overset{n-r+1}{\lambda}x^{n-r} + \dots\dots$$

$$z = \overset{n}{L}x^{n} + \overset{n-1}{L}x^{n-1} + \dots\dots \overset{n-r+1}{L}x^{n-r+1} + \overset{n-r}{L}x^{n-r} + \dots\dots \overset{r}{L}x^{r} + \dots\dots$$

$$(n-1)m\overset{n-1}{\lambda}x^{n-2} + nm\overset{n}{\lambda}x^{n-1} + (n+1)m\overset{n+1}{\lambda}x^{n};$$

$$+\overset{II}{L}x^{2}\dots\dots + \overset{I}{L}x\dots\dots + 1$$

$$\frac{m\mathcal{E}.y.z}{x} = m\overset{I}{\lambda}\overset{n}{L}x^{n} + 2m\overset{II}{\lambda}\overset{n-1}{L}x^{n} + \dots\dots r m\overset{r}{\lambda}\overset{n-r+1}{L}x^{n} + (r+1)m\overset{r+1}{\lambda}\overset{n-r}{L}x^{n} + \dots (n-r+1)m\overset{n-r+1}{\lambda}\overset{r}{L}x^{n} + \dots$$

$$+(n-1)m\overset{n-1}{\lambda}\overset{II}{L}x^{n} + nm\overset{n}{\lambda}\overset{I}{L}x^{n} + (n+1)m\overset{n+1}{\lambda}x^{n} \dots\dots\dots \underline{Dr}.$$

Der 2te Theil d. Gleichung von φ ist:

$$\frac{\mathcal{E}.z}{x} = \overset{I}{L} + 2\overset{II}{L}x + \dots\dots r\overset{r}{L}x^{r-1} + (r+1)\overset{r+1}{L}x^{r} + \dots\dots (n-r+1)\overset{n-r+1}{L}x^{n-r} + \dots$$

$$y = \overset{n}{\lambda}x^{n} + \overset{n-1}{\lambda}x^{n-1} + \dots\dots \overset{n-r+1}{\lambda}x^{n-r+1} + \overset{n-r}{\lambda}x^{n-r} + \dots\dots \overset{r}{\lambda}x^{r} + \dots\dots$$

$$+(n-1)\overset{n-1}{L}x^{n-2} + n\overset{n}{L}x^{n-1} + (n+1)\overset{n+1}{L}x^{n}$$

$$\overset{II}{\lambda}x^{2} + \overset{I}{\lambda}x + 1.$$

$$\frac{y\mathcal{E}.z}{x} = \overset{I}{L}\overset{n}{\lambda}x^{n} + 2\overset{II}{L}\overset{n-1}{\lambda}x^{n} + \dots\dots r\overset{r}{L}\overset{n-r+1}{\lambda}x^{n} + (r+1)\overset{r+1}{L}\overset{n-r}{\lambda}x^{n} + \dots\dots (n-r+1)\overset{n-r+1}{L}\overset{r}{\lambda}x^{n} + \dots$$

$$(n-1)\overset{n-1}{L}\overset{II}{\lambda}x^{n} + n\overset{n}{L}\overset{I}{\lambda}x^{n} + (n+1)\overset{n+1}{L}x^{n}; \dots\dots\dots \underline{Le}.$$

Diese beiden Gleichungen $\underline{Dr}$ und $\underline{Le}$ sind nun einander nach d. Gleichung φ gleich. Da beide Gleichungen kaum in jedem Glied x^{n} als Faktor

mer

wenn man es dieses herunterwickelt so sind die Coefficienten auf einander gleich. Also hier wenn man das [illegible] und $\mathcal{L}$ die Größen in umgekehrter Ordnung schreibt:

Dann $m\lambda^{I}\mathcal{L}^{n} + 2m\lambda^{II}\mathcal{L}^{n-1} + \dots\dots rm\lambda^{r}\mathcal{L}^{n-r+1} + (r+1)m\lambda^{r+1}\mathcal{L}^{n-r} + \dots(n-r+1)m\lambda^{n-r+1}\mathcal{L}^{r} + \dots$

Dann $-n\lambda^{I}\mathcal{L}^{n} - (n-1)\lambda^{II}\mathcal{L}^{n-1} - \dots -(n-r+1)\lambda^{r}\mathcal{L}^{n-r+1} - \dots\dots - r\lambda^{n-r+1}\mathcal{L}^{r} - \dots$

$$\left.\begin{array}{l} +(n-1)m\lambda^{n-1}\mathcal{L}^{II} + nm\lambda^{n}\mathcal{L}^{I} + (n+1)m\lambda^{n+1} \\ -2\lambda^{n-1}\mathcal{L}^{II} \quad - \lambda^{n}\mathcal{L}^{I} \end{array}\right\} = (n+1)\mathcal{L}^{n+1};$$

diese Gleichung abgekürzt und durch $(n+1)$ dividirt gibt:

$$\mathcal{L}^{n+1} = \frac{(m-n)\lambda^{I}\mathcal{L}^{n} + (2m-(n-1))\mathcal{L}^{n-1}\lambda^{II} + \dots\dots(rm-(n-r+1))\mathcal{L}^{n-r+1}\lambda^{r} + \dots\dots}{n+1}$$

$$+\frac{((n-1)m-2)\mathcal{L}^{II}\lambda^{n-1} + (nm-1)\mathcal{L}^{I}\lambda^{n} + (n+1)m\lambda^{n+1}}{n+1};$$

welches demselben Gesetze unterworfen ist als wo $\mathcal{L}^{n}$ war, wenn n^{1} gleich.

Wollen wir nun $\mathcal{L}^{n}$ und $\mathcal{L}^{n+1}$ haben so dürfen wir nur statt n, $(n-1)$ setzen, so wird also

$$\mathcal{L}^{n} = \frac{(m-(n-1))\lambda^{I}\mathcal{L}^{n-1} + (2m-(n-2))\mathcal{L}^{n-2}\lambda^{II} + \dots(rm-(n-r))\mathcal{L}^{n-r}\lambda^{r} + \dots}{n}$$

$$+\frac{((n-2)m-2)\mathcal{L}^{II}\lambda^{n-2} + ((n-1)m-1)\mathcal{L}^{I}\lambda^{n-1} + nm\lambda^{n}}{n};$$

Hiermit ist nun das theoretische dieses Abschnitts

geschlossen und es folgen nun noch Anwendungen.

Zusatz.

Die Anwendung geschieht folgendermassen:

Es sey z. B. die n^{te} Potenz von einer 3theiligen Funktion $1+\alpha x+\beta x^2$ zu suchen.

Hier ist nach der vorigen Bedeutung $\alpha=\overset{I}{\lambda}$; $\beta=\overset{II}{\lambda}$, $\overset{III}{\lambda}=0$ $\overset{IV}{\lambda}=0$ u. s. w., und

$$(1+\alpha x+\beta x^2)^m = 1+\overset{I}{\mathfrak{L}}x+\overset{II}{\mathfrak{L}}x^2+\overset{III}{\mathfrak{L}}x^3+\ldots\ \overset{n}{\mathfrak{L}}x^n+\overset{n+1}{\mathfrak{L}}x^{n+1}+\ldots$$

und nun ist, das n^{te} Glied.

$$\overset{n}{\mathfrak{L}}=\frac{(m-(n-1))\overset{n-1}{\mathfrak{L}}\alpha+(2m-(n-2))\overset{n-2}{\mathfrak{L}}\beta}{n}$$

Setzt man nun für n, ~~Null~~, 1, 2, 3, 4 5 etc. so erhält man das 1te 2te 3te 4te 5te Glied der verlangten Potenz. Es wird also:

$$\overset{I}{\mathfrak{L}}=m\alpha \quad\text{——— für } n=1.$$

$$\overset{II}{\mathfrak{L}}=\frac{(m-1)\overset{I}{\mathfrak{L}}\alpha+2m\beta}{2} \quad\text{——— } n=2$$

$$\overset{III}{\mathfrak{L}}=\frac{(m-2)\overset{II}{\mathfrak{L}}\alpha+(2m-1)\overset{I}{\mathfrak{L}}\beta}{3} \quad\text{——— } n=3$$

$$\overset{IV}{\mathfrak{L}}=\frac{(m-3)\overset{III}{\mathfrak{L}}\alpha+(2m-2)\overset{II}{\mathfrak{L}}\beta}{4} \quad\text{——— } n=4$$

$$\overset{V}{\mathfrak{L}}=\frac{(m-4)\overset{IV}{\mathfrak{L}}\alpha+(2m-3)\overset{III}{\mathfrak{L}}\beta}{5} \quad\text{——— } n=5$$

$$\overset{VI}{\mathfrak{L}}=\frac{(m-5)\overset{V}{\mathfrak{L}}\alpha+(2m-4)\overset{IV}{\mathfrak{L}}\beta}{6} \quad\text{——— } n=6.$$

u. s. w.

Will man diese Koeffizienten nun noch mehr bestimmen wollen, so darf man nur den Werth von L^{I} in L^{II}, dann den Werth L^{II} in L^{III} setzen u. s. w.

Wir nun hingegen die verlangte Potenz $(1+\alpha x+\beta x^2)^m$ bestimmt z. B. $m=3$, so sucht man so viele Koeffizienten bis man auf einen stößt der $=0$ wird, so wird man finden: F

F da der allg: Coeff aus 2 Theilen besteht, so wird gewöhnlich das erste zu erst $=0$ dann auch das zweite Theil

$$L^{I} = 3\alpha$$

$$L^{II} = \frac{2L^{I}\alpha + 6\beta}{2} = 3\alpha^2 + 3\beta$$

$$L^{III} = \frac{L^{II}\alpha + 5L^{I}\beta}{3} = \alpha^3 + 6\alpha\beta$$

$$L^{IV} = \frac{4L^{III}\beta}{4} = L^{II}\beta = 3\alpha^2\beta + 3\beta^2$$

$$L^{V} = \frac{-L^{IV}\alpha + 3L^{III}\beta}{5} = 3\alpha\beta^2$$

$$L^{VI} = \frac{-2L^{V}\alpha + 2L^{III}\beta}{6} = \beta^3$$

$$L^{VII} = \frac{-3L^{VI}\alpha + L^{V}\beta}{7} = \frac{-3\alpha\beta^3 + 3\alpha\beta^3}{7} = 0$$

Es ist also $(1+\alpha x+\beta x^2)^3 = 1 + 3\alpha x + (3\alpha^2+3\beta)x^2 + (\alpha^3+6\alpha\beta)x^3 + (3\alpha^2\beta+3\beta^2)x^4 + 3\alpha\beta^2 x^5 + \beta^3 x^6$;

Alt. Zusatz 2.

Man eine Function von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$

$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\ldots$ gegeben wird und man die m^{te} Potenz von ihr verlangt, so setze man

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)^m = \left(1+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}x^2+\frac{\delta}{\alpha}x^3+\frac{\varepsilon}{\alpha}x^4\right)^m\cdot\alpha^m;$$

um eine Funktion zu erhalten die mit 1 anfängt. d. h. man dividire also die Funktion mit dem ersten Gliede und setze dasselbe als Faktor ausserhalb der Parenthese an. Dasselbe thut man bei einer Funktion

$$(x+ax^2+bx^3+cx^4)^m = (1+ax+bx^2+cx^3)^m\cdot x^m,$$

und sucht hierauf die m^{te} Potenz des zusammengesetzten Faktors wie vorhin.

Die allgemeinste Form einer solchen Funktion ist:

$$z = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Dx^{m+3d} + Ex^{m+4d} + \ldots$$

wollte man nun die ersten Glieder einer unbestimmten Potenz k von ihr wissen, so würde man dieselbe auf folgende Art finden können.

Es ist $z = \left(1+\frac{B}{A}x^d+\frac{C}{A}x^{2d}+\frac{D}{A}x^{3d}+\frac{E}{A}x^{4d}\right)Ax^m$

Setzt man nun $\frac{B}{A}=\alpha$; $\frac{C}{A}=\beta$ $\frac{D}{A}=\gamma$, $\frac{E}{A}=\delta$; $x^d=y$ also $x=y^{\frac{1}{d}}$.

so ist:

$$z=(1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4)\,Ay^{\frac{m}{d}}$$ und

$$z^k=(1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4)^k\cdot Ay^{\frac{mk}{d}}$$; und hierbei

Hierbei kommt es nun darauf an, die ersten Glieder der Potenz $(1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\ldots)^{\pi}$ nach oben zu bestimmen, alles mit $Ay^{\frac{m\pi}{d}}$ zu multipliciren und endlich die Werthe für α, β, γ δ, zu substituiren. Es wird aber jeder Coeff: von sich eine unendl. Reihe bilden.

Ein Beispiel.

$$y=\frac{a}{\sqrt[5]{(3x^4-x^5+2x^7-6x^{11})^3}}=\frac{a}{x^2\sqrt[5]{27x^2}}\left(1-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{2}{3}x^3-2x^7\right)^{-\frac{3}{5}}$$

Für die Funktion $\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x^3-2x^7\right)^{-\frac{3}{5}}=Z$ ist

$$m=-\tfrac{3}{5}\;;\;\overset{I}{\lambda}=-\tfrac{1}{3}\;;\;\overset{II}{\lambda}=0\;;\;\overset{III}{\lambda}=\tfrac{2}{3}\;;\;\overset{IV}{\lambda}=\overset{V}{\lambda}=\overset{VI}{\lambda}=0\;;\;\overset{VII}{\lambda}=-2\;;$$

und die zu suchende Funktion:

$$Z^m=1+\overset{I}{\mathfrak{L}}x+\overset{II}{\mathfrak{L}}x^2+\overset{III}{\mathfrak{L}}x^3+\ldots\;\overset{n}{\mathfrak{L}}x^n+\ldots$$

und der ~~...~~ Koeffizient des n^{te} Gliedes in der Reihe Z^m:

$$\Psi=\overset{n}{\mathfrak{L}}=\frac{-\frac{1}{3}\left(m-(n-1)\right)\overset{n-1}{\mathfrak{L}}+\frac{2}{3}\left(3m-(n-3)\right)\overset{n-3}{\mathfrak{L}}-2\left(7m-(n-7)\right)\overset{n-7}{\mathfrak{L}}}{n}$$

Für

$n=1$ ist $\overset{I}{\mathfrak{L}}=-\frac{1}{3}m$

$n=2$ — $\overset{II}{\mathfrak{L}}=\dfrac{-(m-1)\frac{1}{3}\overset{I}{\mathfrak{L}}}{2}$

$n=3$ — $\overset{III}{\mathfrak{L}}=\dfrac{-\frac{1}{3}(m-2)\overset{II}{\mathfrak{L}}+\frac{2}{3}\cdot 3m}{3}$

$n=4$ — $\overset{IV}{\mathfrak{L}}=\dfrac{-\frac{1}{3}(m-3)\overset{III}{\mathfrak{L}}+\frac{2}{3}(3m-1)\overset{I}{\mathfrak{L}}}{4}$

$$n=5 \text{ ist } \overset{V}{\mathcal{L}} = \frac{-\frac{1}{3}(m-4)\overset{IV}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-2)\overset{II}{\mathcal{L}}}{5}$$

$$n=6 \text{ — } \overset{VI}{\mathcal{L}} = \frac{-\frac{1}{3}(m-5)\overset{V}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-3)\overset{III}{\mathcal{L}}}{6}$$

$$n=7 \text{ ist } \overset{VII}{\mathcal{L}} = \frac{-\frac{1}{3}(m-6)\overset{VI}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-4)\overset{IV}{\mathcal{L}} - 7m.2}{7}$$

$$n=8 \text{ ist } \overset{VIII}{\mathcal{L}} = \frac{-\frac{1}{3}(m-7)\overset{VII}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-5)\overset{V}{\mathcal{L}} - 2(7m-1)\overset{I}{\mathcal{L}}}{8}$$

Beim Einsetzen der Werthe in die fand + die n^ten Coeff. ausgift muss man bedenken, dass die Zeichen über $\mathcal{L}$, Ordnungszahlen nicht Exponenten sind. Daher sind die Ordnungszahl keinen Sinn sobald n kleiner die abzusetzende Zahl, es bedeutet nur dass dieses Glied in der Reihe + nicht vorhanden ist. Daher für $n=1$ und $n=2$ kann der Werth nur in den ersten Theil gen + hereingesetzt werden bei $n=3$ auch in den 2ten Theil ersetz.

Setzt man für m die Werthe so ist

$$\overset{I}{\mathcal{L}} = +\frac{3}{15} \text{ ———————— } = +\frac{1}{5}$$

$$\overset{II}{\mathcal{L}} = +\frac{8}{30}\overset{I}{\mathcal{L}} \text{ ———————— } = +\frac{4}{75}$$

$$\overset{III}{\mathcal{L}} = +\frac{13\overset{II}{\mathcal{L}} - 18}{45} \text{ - - - - - - - - } = -\frac{1298}{3375}$$

$$\overset{IV}{\mathcal{L}} = +\frac{18\overset{III}{\mathcal{L}} - 28\overset{I}{\mathcal{L}}}{60} \text{ - - - - - - - - } = -\frac{1174}{5625}$$

$$\overset{V}{\mathcal{L}} = +\frac{23\overset{IV}{\mathcal{L}} - 38\overset{II}{\mathcal{L}}}{75} \text{ ———————— } = -\frac{38402}{421875}$$

$$\overset{VI}{\mathcal{L}} = +\frac{28\overset{V}{\mathcal{L}} - 48\overset{III}{\mathcal{L}}}{90} \text{ ———————— } = +\frac{3356372}{18984375}$$

$$\overset{VII}{\mathcal{L}} = +\frac{33\overset{VI}{\mathcal{L}} - 58\overset{IV}{\mathcal{L}} + 126}{105} \text{ ——— } = +\frac{910867342}{664453125}$$

$$\overset{VIII}{\mathcal{L}} = +\frac{38\overset{VII}{\mathcal{L}} - 68\overset{V}{\mathcal{L}} + 136\overset{I}{\mathcal{L}}}{120.} \text{ ——— } = +\frac{7432093837}{9966796875}$$

und endlich wenn man in Z^m die Werthe für $\overset{I}{\mathcal{L}}\,\overset{II}{\mathcal{L}}$ u. s. f.

setzt und mit $\frac{a}{x^2\sqrt[5]{27x^2}}$ multiplizirt, so ist:

$$y = \frac{a}{x^2\sqrt[5]{27x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{4}{75}x^2 - \frac{1298}{3375}x^3 - \frac{1174}{5625}x^4 - \frac{38402}{421875}x^5 + \frac{3356372}{18984375}x^6 + \frac{910867342}{664453125}x^7 + \frac{7432093837}{9966796875}x^8 + \ldots\right)$$

IX Abschnitt.

Von den quadratischen Gleichungen, und unbestimmten Aufgaben.

Die Gleichungen überhaupt werden eingetheilt in einfache und zusammengesetzte. Einfach heißt eine Gleichung wenn x nur in der 1te Potenz vorkömmt. Zusammengesetzt wenn x in einer höheren Potenz erscheint, und nach dem höchsten Exponenten der ihnen den Namen giebt heißen sie, quadratisch, cubisch, u. s. w. u. überhaupt Gleichungen von dem nte Grade, wenn n der höchste Exponent des x ist. Man nennt sie auch höhere Gleichungen.

Vollständig heißt eine höhere Gleichung wenn x in allen Potenzen nach und nach um 1 steigend vorkömmt, fehlen aber zwischen d. 1te u. höchsten Potenz einige Dignitäten so heißt sie unvollständig.

Zur Auflösung d. quadratischen Gleichungen hat man bestimmte Regeln, die Gleichungen höher Ordnung kann man aber allgemein behandeln weil man für sie

einzelne noch keine bestimmte Regeln d. Auflösung gefunden hat.

Wurzelgrößen ist möglich aus einer Gleichung wegzuschaffen; man kann man dies nicht thun, und es kennt bloß durch ein hier neue Methode zu zeigen wodurch man manchmal zum Zweck kommt.

Kommen √ Größen in einer Gleichung nur einerlei Grade vor und ihre Verbindung + anderen Größen so wird dies sich leicht thun lassen z. B. $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $= a = b$.

In Fällen aber wie $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=c$ wird die √ Wegschaffung unmöglich. denn $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3=c^3 = a+3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}+b=c^3$

In der Anwendung stößt man in der Regel nur auf ~~[illegible]~~ einzelne Verbindungen von √ Größen.

und da man überhaupt aus denen eine Gleichung rational zu machen sucht, wenn sich ~~die~~ unbekannte Größe unter dem √ Zeichen steht, so ist es daher nöthig eine Methode anzugeben wodurch dies geschieht, die bekannten Größen können dann nur irrat. seyn.

In der Anwendung kommen hierinnen nur gewöhnlich folgende Fälle vor:

1/ Wenn sich nur 1 √ Zeichen in der Gleichung befindet.

Hier schafft man nur das √ Zeichen auf eine Seite, und sucht die x Größe gestärkt zu erhalten, so erhebt man die Gleichung auf die Potenz des √ Exponenten.

z. B. $a - \sqrt[3]{a+x} = b.$

$$\sqrt[3]{a+x} = a - b,$$
$$\left(\sqrt[3]{a+x}\right)^3 = (a-b)^3$$
$$(a+x) = (a-b)^3$$
$$x = (a-b)^3 - a.$$

2/. Wenn sich unter dem √ Zeichen noch mehrere √ Zeichen befinden z. B.

$$\sqrt{ax - \sqrt[3]{cx+d+\sqrt{x}}} = a - b^2c$$
$$ax - \sqrt[3]{cx+d+\sqrt{x}} = (a-b^2c)^2$$
$$~~ax~~ + \sqrt[3]{cx+d+\sqrt{x}} = ax - (a-b^2c)^2$$
$$cx+d+\sqrt{x} = \left(ax-(a-b^2c)^2\right)^3$$
$$\sqrt{x} = \left[ax-(a-b^2c)^2\right]^3 - cx - d$$
$$x = \left[\left[ax-(a-b^2c)^2\right]^3 - cx - d\right]^2$$

Um nun x völlig frei herzustellen erhebe man wieder und nenne d. kürzern Arbeit wegen zusammen,

gesetzte Ausdrücke bekannter Größen et einzelne Buch-

staben: wie

$(a-b^2c) = f$. so ist

$$x = \left[\left[ax - f^2\right]^3 - cx - d\right]^2$$

$$x = \left(a^3x^3 - 3a^2x^2f^2 + 3axf^4 - f^6 - cx - d\right)^2$$

$x = \left(a^3x^3 - 3a^2x^2f^2 + x(3af^4 - c) - f^6 - d\right)^2$; wenn $(3af^4 - c) = g$. u. $(f^6 + d) = h$ setzt

ist $x = \left(a^3x^3 - 3a^2x^2f^2 + gx - h\right)^2$ und zum Quadrat erhoben ist.

$$x = a^6x^6 - 6a^5f^2x^5 + 9a^4x^4f^4 + 2a^3gx^4 - 6a^2gf^2x^3 + g^2x^2 - 2a^3hx^3 + 6a^2hf^2x^2 - 2ghx + h^2$$

$$a^6x^6 - 6a^5f^2x^5 + (9a^4f^4 + 2a^3g)x^4 - (6a^2gf^2 + 2a^3h)x^3 + (6a^2hf^2 + g^2)x^2 - (2gh+1)x + h^2 = 0$$

$$x^6 - \frac{6a^5f^2}{a^6}x^5 + \left(\frac{9a^4f^4 + 2a^3g}{a^6}\right)x^4 - \left(\frac{6gf^2 + 2ah}{a^4}\right)x^3 + \left(\frac{6a^2hf^2 + g^2}{a^6}\right)x^2 - \left(\frac{2gh+1}{a^6}\right)x + \frac{h^2}{a^6} = 0$$

3/ Wenn 2 verschiedenartige √Größen in einer Gleichung vorkommen sind.

Diese wegzuschaffen ist nicht nur möglich und es gehört ~~Kostet~~ wie es scheint viel Umsicht dazu. z. B.

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = a.$$

Man fange die Wegschaffung des höchsten √Exponenten an, u. versuche, sobald es ob. in der Auflösung weiter auf verschiedenartige √Exponenten oder unter den √zeichen auch verschiedene Größen so ist die Operation nicht an-

wandbar, da man bei jeder Fortsetzung immer noch solche √ Größen erhalten würde. also

~~$\sqrt[3]{x} = a - \sqrt{x}$~~

~~$x = a^3 - 3a^2\sqrt{x} + 3ax - x\sqrt{x}$~~

~~$x = a^3 + \sqrt{x}(3a - 3a^2 - x)$~~

$$\sqrt[3]{x} = a - \sqrt{x}$$

$$x = a^3 - 3a^2\sqrt{x} + 3ax - x\sqrt{x}.$$

$$-x + a^3 + 3ax = \sqrt{x}(3a^2 - x)$$

$$x(3a^2 - x)^2 = (a^3 + 3ax - x)^2$$

$$x(9a^4 - 6a^2x^2 + x^2) = a^6 + 6a^4x + 9a^2x^2 - 6ax^2 + x^2;$$ und

$$x^3 - 6a^2x^2 + 9a^4x = a^6 + 6a^4x + 9a^2x^2 - 6ax^2 + x^2;$$

$$x^3 + (6a - 15a^2 + 1)x^2 + 3a^4x - a^6 = 0;$$

I. Reine quadratische Gleichungen

Man schafft das Quadrat d. x Größe auf die eine Seite (als zuerst +) der Gleichung, und betrachtet sie also vorläufig ganz wie einfache Gleichungen. Die einfachsten Form ist:

$$x^2 = a$$

$$x = \pm\sqrt{a}.$$

Man glaubt, x habe hier gleichzeitig zwey ent-
gegengesetzte Werthe; es kann <u>nur</u> + <u>oder</u> − seyn, und
+ und − ist hier bloß als Alternative anzusehen.
Welcher Werth genommen werden soll, wird aus der
Aufgabe jedesmal klar seyn. So z. B. $x^2 = \pm\sqrt{25}$
so ist $x = +5$ oder -5. denn beides gibt 25.

3. Bsp. $b - ax^2 = \frac{cx^2}{a} - d$. ist

$$ab - a^2x^2 = cx^2 - ad;$$

$$x^2(c + a^2) = ab + ad;$$

$$x^2 = \frac{ab + ad}{c + a^2};$$ und

$$x = \sqrt{\frac{ab + ad}{c + a^2}}$$

II Von reinen quadr. Gleichungen

Man sagt von dem Quadrate ~~einer~~ Größe und sie ~~zwey einer~~ 2theiligen Größe, es sey <u>vollständig</u> oder <u>unvollständig</u>.

Die 4 Hauptformen sind:

$$(\pm a \pm b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\pm a \mp b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$ Jedes vollständige
Quadrat einer 2theiligen Größe ist daher nothwendig

aus 3 Theilen bestehen.

Ist das Product 2ab negativ so ist auch eine √ + die andere √ −; ist das Product +2ab, so sind entweder die Wurzeln beide − od. beide + u welche genommen wird muss b. d. Aufgabe hervorgehen.

Gewöhnlich nimt man wenn −2ab ist, die erste √ als positiv an u die 2te negativ, und wenn +2ab steht, beide + wenn n. die Aufgabe das Gegentheil fordert.

$a^2 \pm 2ab$, oder $b^2 \pm 2ab$ wären also unvollständige Quadrate, um sie vollständig zu machen zieht man aus dem ersten Theil die √, verdoppelt sie und dividirt damit den 2ten Theil des unvollständigen Quadrats, so giebt der Quotient den 2ten Theil der √ selbst. Diesen quadrirt u zu addirt giebt alsdann ein vollständiges Quadrat.

Beyspiel. $4a^2x - 6ac$ sey ein unvollständiges Quadrat

$\sqrt{4a^2x} = 2a\sqrt{x}$; $\frac{-6ac}{2 \cdot 2a\sqrt{x}} = -\frac{3c}{2\sqrt{x}}$; und

$\left(-\frac{3c}{2\sqrt{x}}\right)^2 = +\frac{9c^2}{4x}$ und hieraus

$4a^2x - 6ac + \frac{9c^2}{4x}$ ein vollständiges Quadrat.

Es ist übrigens möglich daß ein □ in der Art unvoll-
ständig ist daß einer der √ irrational ist.

Eine gemischte quadratische Gleichung hat folgende Grund-
form.

$$x^2 \pm ax = \pm b$$

Wenn eine solche quadratische Gleichung auflösbar seyn soll, so muß sie folgende wesentliche Eigenschaften haben:

1) auf der einen Seite des Gleichheits-Zeichen muß das Quadrat, allein, und + stehen.

2. auf derselben Seite muß ein anderes Glied seyn, worin die unbekannte Größe mit irgend einem + od. − Koeffizienten multiplizirt ist.

3) Es muß auf der andern Seite des = heit Zeichens eine ganz bekannte Größe stehen.

Also $x^2 \pm ax = \pm b$ vollständig gemacht ist:

$x^2 \pm ax + \frac{1}{4}a^2 = \pm b + \frac{1}{4}a^2$; und

$x \pm \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 \pm b}$, endlich

$x = \mp \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 \pm b}$

Es ergibt sich schon daraus hervor weil dennoch kein Produkt ist.

Zuletzt muß man sich nicht $\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 \pm b}$ nicht = zu setzen $\pm\frac{1}{2}a\sqrt{\pm b}$. Zum Beleg:

(triangle with sides a, b, c) $a^2 + b^2 = c^2$; $c = \sqrt{a^2+b^2}$, nicht $= a + \sqrt{b^2} = a + b$

In der Anwendung macht es gleich die Schlußgleichung, und es ist der Werth der unbekannten Größe = ihrem halben Koeffizienten des 2ten Gliedes aber mit entgegen gesetzten Zeichen, + oder − einer √ aus dem Quadrat dieses halben Koeffizienten, u. dem Zusatze der ganz bekannten Größe auf der zweiten Seite des Gleichheitszeichens mit seinem ihm eigenthümlichen Zeichen.

Da nun bey einer unreinen quadratischen Gleichung das x nicht allein da steht, sondern auch noch mit einem Koeffizienten verbunden ist, so kann man sie unter folgender allgemeinen Form darstellen.

$$Mx^2 \pm Nx = \pm P$$

$$x^2 \pm \frac{N}{M}x = \pm \frac{P}{M} \text{ und}$$

$$x = \mp \frac{N}{2M} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4M^2} \pm \frac{P}{M}};$$

$$x = \mp \frac{N}{2M} \pm \sqrt{\frac{N^2 \pm 4MP}{4M^2}}$$

$$x = \mp \frac{N}{2M} \pm \frac{\sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M} \text{ und endlich}$$

$$x = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}.$$

dieses kann als Normalformel dienen um

in

in practischen Fällen allgemeine Auflösungen machen zu können.

Beispiel $\frac{b}{c} - \frac{ax^2+b}{d} = \frac{2x^2-x}{a} + ax$
acd)

$$abd - a^2cx^2 + abc = 2cdx^2 - cdx + a^2cdx;$$

$$abd - abc = x^2(2cd + a^2c) + (a^2cd - cd)x$$

$$x^2 + \frac{a^2cd - cd}{2cd + a^2c}\,x = \frac{abd - abc}{2cd + a^2c}$$; Formel $x = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}$.

$$x = \frac{-cd(1-a^2) \pm \sqrt{c^2d^2(a^2-1)^2 \pm 4abc(2d+a^2)(d-c)}}{2c(2d+a^2)}$$

Es können hier noch einige Gleichungen angeführt werden welche eigentlich höhere Gleichungen sind, durch ihre eigenthümliche Beschaffenheit aber sich einerlei Behandlung als quadratische unterwerfen.

Nämlich wenn eine Gleichung gegeben ist

$$Mx^{2n} \pm Nx^n = \pm P$$

d. h. eine Gleichung welche allerdings vom $2n^{ten}$ Grade ist, die aber das Charakteristische hat daß die unbekannte Größe in einer höheren gerade Dignität erscheint, daß ferner noch eine Größe, in welcher die unbekannte Größe gerade in der $\frac{1}{2}$ Dignität enthalten ist. Diese Gleichungen lassen sich ganz wie die reinen quadratischen

behandeln, um das zu bewerkstelligen setze man

$x^n = z$ so ist

$$Mx^{2n} \pm Nx^n = \pm P;\ \text{gleich}$$

$$Mz^2 \pm Nz = \pm P \ \text{und}$$

$$z = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M} \ \text{und also}$$

$$x^n = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M} \ \text{und}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}}.$$

Das $\sqrt[n]{}$ Zeichen ist hier ohne $\pm$, weil n eine gerade oder ungerade Zahl seyn kann.

Beyspiel in Zahlen:

$$x^6 - 2x^3 = 8$$

$$x^3 = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$$

$$x^3 = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \ \text{und}$$

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{-2} \end{cases}$$

Aufmerksam muss man noch darauf seyn, dass oft [illegible] Buchstaben zwischen die Irrationalität weggeschafft werden kann; hiefür lassen sich aber nicht Regeln geben, sondern nur die Uebung muss das geben.

Der Vortheil des in letztern Zusammenhalten ist hier zu ersehen. z. B.

$adx - acx^2 = bcx - bd$

~~$acx^2 + (bc - ad)x$~~

$acx^2 + (bc - ad)x = bd$ hier ist $M = ac$, $N = (bc - ad)$; $P = bd$

und nach der Formel $x = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}$ ist hier

$x = \frac{ad - bc \pm \sqrt{(bc - ad)^2 + 4bdac}}{2ac} = \frac{ad - bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 + 4abcd}}{2ac}$;

$x = \frac{ad - bc \pm (ad + bc)}{2ac}$; und hieraus ist

$x = \frac{2ad}{2ac} = \frac{d}{c}$ oder $x = -\frac{b}{a}$;

Beyspiel:

$ax(1+d) - bd = \frac{ax(b - ax)}{c} - cd$

c) $acx(1+d) - bcd = abx - a^2x^2 - c^2d$ und

$a^2x^2 + acx(1+d) - abx = bcd - c^2d$

$a^2x^2 + x[ac(1+d) - ab] = cd(b - c)$; hier $M = a^2$; $N = ac(1+d) - ab$; $P = cd(b - c)$

$x = \frac{-(ac(1+d) - ab) \pm \sqrt{[ac(1+d) - ab]^2 + 4a^2cd(b - c)}}{2a^2}$

$x = \frac{-a(c + cd - b) \pm \sqrt{a^2(c + cd - b)^2 + a^2(4cdb - 4c^2d)}}{2a^2}$

$x = \frac{-(c + cd - b) \pm \sqrt{c^2 + 2c^2d + c^2d^2 - 2cb - 2cdb + 4cbd - 4c^2d + b^2}}{2a}$

$x = \frac{-(c + cd - b) \pm \sqrt{c^2 - 2c^2d + c^2d^2 - 2bc + 2bcd + b^2}}{2a}$ + ~~[illegible]~~ =

$x = \frac{-(c + cd - b) \pm \sqrt{c^2 + 2c^2d + c^2d^2 - 2bc + 2bcd + b^2}}{2a}$

$$x = \frac{-(c+cd-b) \pm \sqrt{(c-cd)^2 - 2b(c-cd)+b^2}}{2a}$$

$$x = \frac{-(c+cd-b) \pm \sqrt{(c-cd-b)^2}}{2a}$$

$$x = \frac{-(c+cd-b \pm (c-cd-b))}{2a}$$ und endlich aus

$$x = \frac{b-c}{a}$$ und auch $$x = -\frac{cd}{a};$$

Man kann bey jeder quadratischen Gleichung die Sache allemal so betrachten, daß man die Hauptgleichung auf 0 reduziert, und diese Größe als aus 2 Faktoren zerlegt betrachtet, welches ihre Wurzeln sind. z. B.

$$x^2 \pm ax = \pm b$$

$$x^2 \pm ax \mp b = 0$$ und hieraus ist

$$x = \mp \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b}$$

$$x \pm \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b} = 0$$

$$x \pm \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b} = 0$$ Xzirt.

$$x^2 \pm \tfrac{1}{2}ax - x\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b}\right)$$

$$\pm \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{4}a^2 \mp \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b}$$

$$+ x\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b} \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b} - \left(\tfrac{1}{4}a^2 \pm b\right)$$

$$x^2 \pm ax + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 \mp b = 0.$$

$$x^2 \pm ax \mp b = 0$$ wie oben.

Da nun diese Form allgemein war so ist es auch die Folgerung sagen.

Wenn man also einen Ausdruck hat von der Form einer quadratischen Gleichung, so wird man diese allemal in 2 Factoren zerlegen können, indem man sie als eine gemischte quadratische Gleichung behandelt, und wenn die Werthe der unbekannten Größe gefunden sind, so bringt man diese nur = 0 reduziren, um an ihnen die Factoren zu haben. (Diese Methode heißt Wurzeln)

Wenn in den Gleichungen zugleich mehrere unbekannte Größen vorkommen, so wird man auch sie wie d. einfachen Gleichungen behandeln, und durch ihre unbekannte eliminiren entweder substituiren etc. wie es am vortheilhaftesten ist.

Aufgabe

Die Summe 2er Zahlen und ihrer Quadrate sind gegeben man soll die Zahlen finden:

$x + y = a \qquad x^2 + y^2 = b$

$x = a - y; \qquad a^2 - 2ay + y^2 + y^2 = b$

$$2y^2 - 2ay = b - a^2$$

$$y^2 - ay = \frac{b - a^2}{2}$$

$$y = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{b - a^2}{2}} = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2(b - a^2)}{4}}$$

$$y = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$$

$y = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2}$ dies in $x+y=a$ gesetzt

$x + \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2} = a$ und

$x = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2}$

Macht man für die Gleichung $x+y=a$ die Probe

so ist $x+y = a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$;

für $x^2+y^2=b$.

$\frac{1}{4}a^2 \pm \frac{1}{2}a\sqrt{2b-a^2} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 \mp \frac{1}{2}a\sqrt{2b-a^2} +$

$+\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$

Eine andere Auflösung der Aufgabe ist folgende

vide [?]

Wir wissen aus Seite 76 hier, daß

die größte Zahl aus der Summe und Differenz bestehet (?)

und durch $\frac{s+d}{2} = x$. u. die kleinere Zahl $\frac{s-d}{2}$.

heißt nun hier die Summe der Größen a so ist

x die größere Zahl und $(a-x)$ die kleinere. und

I $\frac{s+d}{2} + \frac{s-d}{2} = a$. hieraus $\left(\frac{s+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s-d}{2}\right)^2 = b$

$\frac{s^2+2sd+d^2}{4} + \frac{s^2-2sd+d^2}{4} = b$

$s^2+d^2 = 2b$; und der ersten Gleich. I ist $s=a$

Dadurch wird auch a in die Gl. gebracht.

$a^2+d^2 = 2b$ und $d = \pm\sqrt{2b-a^2}$ setzt man

nun drückt d in der Grundgleichung so ist also

für die grössere Zahl $x = \frac{f+d}{2} = \frac{a+d}{2} = \frac{a \pm \sqrt{2b-a^2}}{2}$

$x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2}$ für die kleinere Zahl

$\frac{f-d}{2} = \frac{a-d}{2} = \frac{a \mp \sqrt{2b-a^2}}{2} = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2}$;

II Aufgabe

Das Produkt aus zwey Zahlen sammt der Summe ihrer Quadrate ist gegeben, man soll die Zahlen zu finden. also.

$xy = a \quad ; \quad x^2 + y^2 = b$;

$2xy = 2a$ und $x^2 + 2xy + y^2 = b + 2a$ und

$x + y = \pm\sqrt{b+2a}$

so ist auch $x^2 - 2xy + y^2 = b - 2a$ und

$$\left.\begin{array}{l} x - y = \pm\sqrt{b-2a} \\ x + y = \pm\sqrt{b+2a} \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$2x = \pm\sqrt{b+2a} \pm \sqrt{b-2a}$

$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b+2a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b-2a}$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = \pm\sqrt{b+2a} \\ -x + y = \mp\sqrt{b-2a} \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$2y = \pm\sqrt{b+2a} \mp \sqrt{b-2a}$

$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b+2a} \mp \frac{1}{2}\sqrt{b-2a}$;

2te Auflösung von $xy = a$ und $x^2 + y^2 = b$

$x = \frac{a}{y}$ also $\frac{a^2}{y^2} + y^2 = b$

$a^2 + y^4 = by^2$; $= y^4 - by^2 = -a^2$

eine höhere Gleichung von der Form $x^{2n} \pm ax^n = b$ (Seite 189)

Man setze daher $y^2 = z$ so ist.

$z^2 - bz = -a^2$ und nach der Hauptformel

$z = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}$ ist hier $M = 1$; $N = b$; $P = -a^2$

ergibt daher

$z = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}$

Da nun ferner $z = y^2$ ist, so ist.

$y^2 = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}$ und

$y = \sqrt{\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}}$.

Oben war

$x^2 + y^2 = b$.

$x^2 = b - y^2 = b - \left(\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}\right)$ und hieraus

$x = \sqrt{\frac{1}{2}b \mp \sqrt{b^2 - 4a^2}}$;

Es sey $a = 1175$; $b = 2834$ so ist

$x = 25$ und $x = 47$.

$y = 47$ u. $y = 25$. d. h. die eine Zahl ist

allemahl 25 u. die andere 47.

3te Auflösung um auch die 4ten Grades Gleichung zu vermeiden, ist durch Summe u. Differenz die Grössen zu finden:

$xy = a \qquad x^2 + y^2 = b.$

$\frac{s+d}{2} \times \frac{s-d}{2} = a \; ; \quad \left(\frac{s+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s-d}{2}\right)^2 = b.$

$s^2 - d^2 = 4a \qquad \frac{s^2 + 2sd + d^2 + s^2 - 2sd + d^2}{4} = b$

I $s^2 = 4a + d^2 \qquad$ II $s^2 + d^2 = 2b.$

Für s^2 den Werth in I.

$4a + d^2 + d^2 = 2b = 4a + 2d^2 = 2b.$

und $d^2 = b - 2a \; ; \quad d = \pm\sqrt{b - 2a}$

in II den Werth für d^2, ist, da:

~~$s^2 + (b-2a)^2 = 2b$~~

~~$s^2 + b^2 - 4ab + 4a^2 = 2b$~~

$s^2 = 4a + d^2$ war

$s^2 = 4a + b - 2a = 2a + b$ und

$s = \pm\sqrt{2a + b}$

Also in jenem Zahlen Beyspiel $d = \pm\sqrt{2834 - 2.1175} = \pm 22$

und $s = \pm\sqrt{2.1175 + 2834} = \pm 72$; — also die grössere Zahl

$\frac{72+22}{2} = 47$; und die kl. $\frac{72-22}{2} = 25$;

[illegible]

$x+y = xy$

$xy - x = y$

$x = \frac{y}{y-1}$

$xy = x^2 - y^2$

$xy = (x+y)(x-y)$

$xy = x+y$

$1 = x-y$

$x = 1+y$

$\frac{y}{y-1} = 1+y$

$y = (1+y)(y-1) = (y^2-1)$ [illegible]

$y^2 - y = 1.$ und

$y = +\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Da $x = 1+y$ war, so ist

[illegible]

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

III Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, deren Product und der Differenz der Quadrate gleich seyn sollen.

$$\text{I}\; x+y = xy \qquad \text{II}\; xy = x^2 - y^2$$

$$xy - x = y$$

$$x = \frac{y}{y-1};$$

$$\frac{y^2}{y-1} = \frac{y^2}{(y-1)^2} - y^2$$

$$\frac{1}{y-1} = \frac{1}{(y-1)^2} - 1; = \frac{1-(y-1)^2}{(y-1)^2}$$

$$y-1 = 1-(y-1)^2$$

$$y-1 = 1 - y^2 + 2y - 1$$

$$y^2 - y = 1.$$

$$y = +\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4} =$$

$$y = +\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5};$$

$$\frac{1}{y-1} = \frac{1}{(y-1)^2} - 1$$

$$1 = \frac{1}{(y-1)} - (y-1)$$

$$y-1 = 1-(y-1)^2$$

Es war:

$$x = \frac{y}{y-1} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}}{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-1 \pm \sqrt{5}}$$ und wenn man

den Nenner rational macht nach (Seite 101) hier: so ist

$$x = \frac{(1 \pm \sqrt{5})(+1 \pm \sqrt{5})}{(-1 \pm \sqrt{5})(+1 \pm \sqrt{5})} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = x$$

~~Also ist~~ $x+y = 2 \pm \sqrt{5}$ Zur Probe:

$x+y = (x-y)^2 = (x+y)(x-y) = x+y$, d. h.

$x-y = 1$; $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} - (\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 1$

Es ist nun $xy = x + y$

$$xy = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 \pm \sqrt{5}$$

und

$$x^2 - y^2 = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Diese Aufgabe nun kann man auch so stellen: Zwey Größen zu finden deren Summe und Produkt einander gleich sind, deren Unterschied aber die Zahl 1 ist.

Obgleich nun in obiger Gleichung scheint als ob keine bekannte Größe darin, so sieht man wenn man folgende Aufstellung [illegible] vornimmt, obgleich das Gegentheil.

$$x + y = xy$$
$$x + y = x^2 - y^2$$
$$x + y = (x+y)(x-y)$$
$$1 = x - y.$$

Soll aus einer irrationalen zweytheiligen Größe $A \pm B\sqrt{C}$ die Quadrat $\sqrt{}$ gezogen werden, d. h. soll sie in Faktoren zerlegt werden, so kann man hiebey nach der gewöhnlichen Regeln verfahren. Wenn z. B. $2 + \sqrt{3}$ zum Quadrat erhoben wird, so werden die beiden entstehenden rationalen Größen zu [illegible]

$$\text{I}\quad A \pm B\sqrt{C} = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$\text{II}\quad x^2 + y^2 = A \;\Big|\; x = \pm\sqrt{A - y^2}$$

in die I Gl. hineingesetzt

$$A \pm B\sqrt{C} = A - y^2 \pm 2y\sqrt{A - y^2} + y^2$$
$$\pm B\sqrt{C} = \pm 2y\sqrt{A - y^2}$$
$$B^2C = 4y^2A - 4y^4$$
$$y^4 - Ay^2 = -\frac{B^2C}{4}$$
$$y^2 = \pm\sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B^2C}{4}} + \frac{A}{2}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

dies in die II Gl. hineingesetzt.

$$x = \pm\sqrt{A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C} - \frac{A}{2}}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

Probe

$$y^2 = \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$$
$$x^2 = \frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$$
$$x^2 + y^2 = A$$

$$2xy = \pm 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}\right)\left(\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}\right)}$$
$$= \pm 2\sqrt{\frac{1}{4}A^2 \mp \frac{1}{4}A\sqrt{A^2 - B^2C} \pm \frac{1}{4}A\sqrt{A^2 - B^2C} - \frac{A^2 - B^2C}{4}}$$
$$2xy = \pm 2\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - \frac{A^2 + B^2C}{4}}$$
$$= \pm 2\sqrt{\frac{B^2C}{4}} = \pm B\sqrt{C}$$

Es ist also

$$A \pm B\sqrt{C}$$
$$\|$$
$$\left[\pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}\right]^2$$

zieht man die $\sqrt[2]{}$ heraus

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{C}}$$
$$\|$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

welches die formel p. 201 ist.

zusammengezogen werden, und nur das doppelte Produkt eine irrationale Größe bleiben, denn $(2+\sqrt{3})^2 =$ $= 4+4\sqrt{3}+3 = 7+4\sqrt{3}$, woher sich ergeben und dem letzten Ausdruck eine $\sqrt{}$ ziehen lassen muß, obgleich die Art der Entstehung ihr Operation versteckt ist. Allgemein sey also:

α) $\sqrt{A \pm B\sqrt{C}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ so ist

$$A \pm B\sqrt{C} = x \pm 2\sqrt{xy} + y$$

Wenn nun wie hier theils rationale theils irrat. Größen einander = sind so kann dies nur geschehen wenn die rationale Theile unter sich, so wie die irrat. Theile sich gleich sind. Es ist also

I $A = x+y$ und $\pm 2\sqrt{xy} = \pm B\sqrt{C}$ folglich ist

$$4xy = B^2C$$

$$x = \frac{B^2C}{4y}$$

$$A = \frac{B^2C}{4y} + y = 4Ay = B^2C + 4y^2$$

$$y^2 - Ay = -\frac{1}{4}B^2C$$

$$y = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{4}B^2C} = \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$$

demnach I $x = A - \frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$.

$x = \frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$; da sind die Werthe

Eine gemischte irrationale Potenz in einem Wurzelbinom zu zerlegen

~~$A \pm B\sqrt{C} = (x \pm y)^2$~~

~~$\pm B\sqrt{C} = x \pm y - A$~~

~~$B^2C = x^2 \pm 2xy + y^2 + A^2 - 2A(x \pm y)$~~

~~$B^2C - A^2 =$~~

~~Dazu bedarf es der Gl: nicht denn $B\sqrt{C}$ ist das doppelte Prod. der beiden Größen, und da $\sqrt{C}$ als irrat. die eine Größe ist so ist $B = 2x$ also $x = \frac{B}{2}$~~

~~$A = x^2 + (\sqrt{C})^2 = x^2 + C$~~

~~$x = \pm\sqrt{C - A} = \frac{B}{2}$ | $C - A = \frac{B^2}{4}$~~

~~$A = \frac{B^2}{4} + C$~~

Cf. 199.

Die Gl: α ist eigentlich aus $A \pm B\sqrt{C} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$ entstanden indem man nimt sehr den Vortheil allein es ist nicht nöthig das Quadrat Wurzelbinom als irrational anzunehmen da kann auch dann es ist zwar mehr doch wenn ein Nomen rational ist, dann wird das auch zu ausdrücken seyn, indeß, wenn ich $A \pm B\sqrt{C} = (x+y)^2$ annehme, so muß ich p. 201

nur noch die Zeichen des 2ten Theils verschieden sind so kann ich hier nur Zeichen vergleichen daher:

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{C}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

Diese Formel zerlegt also einen irrationalen Ausdruck in die Summe oder Diff. 2er irrat: Ausdr:

Zum Beispiel:

$\sqrt{79 - 20\sqrt{3}}$ so wird in obiger Form

$A = 79$; $B = 20$; $C = 3$; und

$$\sqrt{79 - 20\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{79}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(79)^2 - 3(20)^2}} - \sqrt{\tfrac{79}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{79^2 - 3(20)^2}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{79}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{6241 - 1200}} - \sqrt{\tfrac{79}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6241 - 1200}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{79}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5041}} - \sqrt{\tfrac{79}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5041}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{79}{2} + \tfrac{71}{2}} - \sqrt{\tfrac{79}{2} - \tfrac{71}{2}} = \sqrt{\tfrac{150}{2}} - \sqrt{\tfrac{8}{2}}$$

$$= \sqrt{75} - \sqrt{4} = 5\sqrt{3} - 2.$$

Ebenso ist es wenn aus einer zweitheiligen Größe, wovon der eine möglich der andere unmöglich ist die $\sqrt{\ }$ gezogen werden soll. als

$\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}}$. Hier ist die Wurzel auch zweytheilig und aus einem möglichen einem unmöglichen Theile bestehen. Es sey daher

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{-y}\text{; so ist}$$

$$A \pm B\sqrt{-C} = x \pm 2\sqrt{-xy} - y\text{; und auch hier ist}$$

Es muss der Werth für x und y zeigen, ob diese nun + oder − rational oder irrational, oder ob möglich oder unmöglich ist, da x und y allgemeine Ausdrücke sind daher ist die folgende Rechnung überflüssig, denn $\sqrt{C} = \sqrt{-C}$ gesetzt, giebt für die Werthe von x und y die erforderlichen Werthe

I $A = x - y$ und II $B\sqrt{-C} = 2\sqrt{-xy}$ hieraus

$-B^2C = -4xy = B^2C = 4xy$

und $x = \frac{B^2C}{4y}$ und in I also

$A = \frac{B^2C}{4y} - y$, $= 4Ay = B^2C - 4y^2$ und

$y^2 + Ay = B^2C$

$y = -\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}$ daraus in I.

$x = A - \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C} = +\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}$.

der Unterschied liegt also bloß in ± vor $\frac{1}{2}A$.

da nun y als würkliche Größe negativ unter das √ Zeichen kommt so erhält:

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}A \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}}$$

Für die Anwendung:

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}}$$

Beispiel.

$\sqrt{4 - 16\sqrt{3}}$ hier ist. $A = 4$; $B = 16$; $C = 3$

$\sqrt{4 \pm 16\sqrt{-3}} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{16+768}} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{16+768}}$;

$= 2 + \frac{1}{2}\sqrt{784} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{784}}$;

$= \sqrt{2 + \frac{1}{2}28} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{2}28} = \sqrt{16} \pm \sqrt{-12}$;

$= 4 \pm 2\sqrt{-3}$

Wenn nun in der Anwendung mehrere rationale od. unmögliche Größen hier vorkommen, so wird man die Summe derselben ist A der Formel, und aber so der ± der unmöglichen Größe multiplicirten Faktor ± B bezeichnen

3tes. $y = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} - c - \sqrt{-\frac{4a^2b^2}{c}}}$; hier wird A.

$A = \frac{a^2b^2}{c^2} - c$; $B = 1$; $C = \frac{4a^2b^2}{c}$;

$$y = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} - c\right)^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} - c\right)^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}}$$

Den ersten Theil der Gleichung $= \alpha$ setzt den 2ten $= \beta$.

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^4}{c^4} - \frac{2a^2b^2}{c} + c^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^4}{c^4} + \frac{2a^2b^2}{c} + c^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + c\right)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{a^2b^2}{2c^2} + \frac{1}{2}c} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2}} = \frac{ab}{c} = \alpha$$

der zweite Theil β.

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} - c\right)^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c - \frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c}$$

$\beta = \sqrt{-c}$ und da $y = \alpha + \beta$.

$y = \frac{ab}{c} - \sqrt{-c}$; daß die Probe kann ich leicht von der Richtigkeit überzeugen.

Es sollte hier ein Fall gegeben werden wo die unmöglichen Größen keinen Faktor hat sonst würde ich d. Aufgabe zweckmäßig gleichwohl ist $y = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} - c \pm 2ab\sqrt{-\frac{1}{c}}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} - c - \frac{2ab}{\sqrt{c}}\sqrt{-1}}$ setzen.

Von den unbestimmten Gleichungen

Enthalten Aufgaben nicht mehr od. weniger Bedingungen als zur Bestimmung d. unbekannten Größen nöthig sind so heißen sie bestimmte Aufgaben.

Enthalten sie nicht so viel Bedingungen oder nicht so viel Gleichungen, als unbekannte Größen enthalten sind, so daß man am Ende zwar z. B. eine Schlußgleichung erhält, welche aber nicht blos durch bekannte Größen bestimmt wird, sondern mehrere unbekannte Größen enthält, so heißen sie unbestimmt.

Als Verstandesübung gut. in Anwendung selten vor, und nur zu Auflösung speculativer Fragen behalten sie ihren großen Werth [Eulers kleine Analysis]. –

Sind endlich 3tens mehr Bedingungen gegeben als zur Auflösung nothwendig sind, so sind die Aufgaben mehr als bestimmt, und sind in ihren Bestimmungsbedingungen die z. B. mehr als eine Größe begreifen, so werden sie ungereimt u. unmöglich.

Was nun das Verfahren der unbestimmten Gleichungen betrifft, so findet für selbige eine unbestimmte Zahl

von

von Auflösungen statt, doch schränkt man es gewöhnlich nur auf ganze Zahlen ein, wenn die Aufgabe es sonst unmöglich macht (d. ganze + Zahlen). Können aber auch Fälle vorkommen, so verlangt es sich in der Regel nur + u. zwischen gewissen Grenzen liegend.

Solche Gleichungen können im Allgemeinen nur folgende 4 Hauptformen haben, als:

$$\text{I}\quad y = A \pm Bx$$

$$\text{II}\quad y = \frac{A}{C} \pm Bx$$

$$\text{III}\quad y = \frac{Bx}{A}$$

$$\text{IV}\quad y = \frac{Bx \pm C}{A};$$

Allein soll y eine + ganze Zahl seyn, welches die Beschaffenheit der A, B, C und sind; wie muss x beschaffen seyn?

$$\text{I}\quad y = A \pm Bx$$

1) $A + Bx = y$ = + wenn x eine ganze + Zahl ist.

2) $A - Bx = y$; hier muss $A > Bx$ seyn u. also $x < \frac{A}{B}$;

$$\text{II}\quad y = \frac{A}{C} \pm Bx.$$

Hier hängt es davon ab ob $\frac{A}{C}$ sich durch eine ganze Zahl darstellen läßt, und nur in diesem Falle ist es möglich y durch eine ganze Zahl auszudrücken. ist x + so wird dann

denn $\frac{A}{C} \pm Bx = \frac{A \pm BCx}{C}$ die Summe $A \pm BCx$ ist also nur durch C divisible, wenn A durch C, nicht divisible ist.

auch y + seyn, im Fall aber dass −Bx steht, so ist y dann + wenn $\frac{A}{C} > Bx$ ist und also $x < \frac{A}{BC}$;

III $y = \frac{Bx}{A}$

Hier kann ein Doppelfall statt finden, wenn nämlich die gegebene Grösse sich durch den Nenner theilen und als ganze Zahl darstellen lässt, so kann x eine jede beliebige Zahl seyn. z.B. $y = \frac{32x}{8} = 4x$. — Ist dies aber der Fall so kann man für x den Werth des Nenners, und dessen + jede beliebige Zahl x gibt annehmen, wo dann allemal die Brüche wegfallen z.B. $y = \frac{7x}{31}$

und $x = 31; = 2.31. = 3.31.$ $y = \frac{7.31.x}{31.} = 7x$ $\frac{7.31.2}{31} = 14$,

Allgemein $y = \frac{Bx}{A}$ ist $x = nA$, so ist $y = \frac{BnA}{A} = Bn$ wird.

IV $y = \frac{Bx \pm C}{A}$

Hier ist das Bemerken d. Brüche am schwierigsten.

Es ist hier in dieser Form allemal $A > B$ anzunehmen, wenn gleich in der Aufgabe dies nicht allemal statt findet so ist dies auch unter anzunehmen möglich. Cf. p. 209.

In dem Falle dass C u. A, sich durch B dividiren, so ist allemal möglich die Gleichung in ganzen Zahlen anzugeben denn alsdann ist $y = \frac{x \pm \frac{C}{B}}{\frac{A}{B}}$; setzt man nun $\frac{C}{B} = a$

Ist C durch A divisible, so muss für x, ein Zahlenwerth gesucht werden, wodurch y eine ganze Zahl wird. Ist B durch A divisible, so wird $\frac{nx \pm C}{A}$ weil sich die Brüche nicht [illegible] wenn x eine ganze Zahl bleiben soll

IV $y = \frac{Bx \pm C}{A}$

ist A, B, C, durch A oder B, oder C oder durch einen gemeinschaftlichen factor μ divisibel, so wird der Bruch gehoben. Entsteht die form $y = \frac{x \pm m}{n}$ so muss, wenn y eine ganze Zahl seyn soll x = einem Werth seyn a, so dass $a \pm m = \mu n$

$a = \mu n \mp m$

wo y immer $= \mu$ ist dann

$y = \frac{\mu n \pm m \mp m}{n} = \mu$

bleibt aber die form $\frac{Bx \pm C}{A}$ und ist $A > B$ und dann muss wenn y eine ganze Zahl bleiben soll $x = a$ so dass

$aB \pm C = \mu A$ also

$a = \frac{\mu A \mp C}{B}$ wo B in den im Zähler aufgeht, denn da $aB = \mu A \mp C$, und aB ein vielfaches von B ist so muss auch $\mu A \mp C$ ein vielfaches von B seyn, und zwar ist dies

und $\frac{A}{B}=b$ so ist $y=\frac{x\pm a}{b}$, und hier kommt es nun darauf an, daß man eine Zahl für x nimmt, daß $x \pm a$ durch b theilbar wird. und das kann geschehen indem $(x\pm a)$ ein vielfaches von b werden soll. so ist nämlich $x+a = nb$ u. $x = nb-a$; und dann auch $x-a = nb$, $x = nb+a$.

Also man wird seinen Zweck erreichen wenn man b mit einer ganzen Zahl x [illegible] und $a=\frac{C}{B}$ zum Producte addirt oder subtrahirt, da dann n den Werth von y giebt.

$$y=\frac{na}{a}=n$$

z. B. $y=\frac{6x\pm24}{42}$ so ist $y=\frac{x\pm4}{7}$ [illegible]

$a=4$ $b=7$. Also $x = n7-4$ u. $x = n7+a$.

setze $n = 1, 2, 3$ etc.

$x = 7-4 = 3$ oder $x = 7+4 = 11$

$x = 14-4 = 21-4 = 28-4$

$x = 14+4 = 21+4 = 28+4$

also $y=\frac{60+24}{42}=2$; $y\ \frac{102+24}{42}=3$

u. $y=\frac{108-24}{42}=2$ $y=\frac{150+24}{42}=3$.

$a = -,\ -,\ +,\ -,\ +,\ -,\ +,\ +$

$x = 3, 10, 11, 17, 18, 24, 25, 32$ etc.

$y = 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 4$

Wenn aber ~~[illegible]~~ der Fall ~~[illegible]~~ daß $\mp C$ u. A nicht B dividiren [illegible] so haben sie vielleicht unter sich einen gemeinschaftlichen Theiler, so daß A, B, C kleiner gemacht werden, wie wenn $y=\frac{8x\pm28}{36}=\frac{2x\pm7}{9}$ kleiner gemacht. Ist es nun so, daß die Größen dividirt so kann es doch seyn daß noch 2 von diesen Zahlen

Quotient $= a$ ⌐

Ist $A < B$, so theilt man $\frac{Bx}{A}\pm\frac{C}{A}$ in $\frac{bx}{A}\pm\frac{C}{A}$ [illegible] $\frac{bx}{A}$ das Ganze, wodurch sich der Bruch verkleinert in

$$y = nx + \frac{bx\pm C}{A},$$ wo und der Bruch ein [illegible] gesucht werden wird

$x = nb\mp a$

$$y=\frac{nb\mp a\pm a}{b}=n$$

⌐ Nun ist aber a auch nothwendig eine ganze Zahl. Sie ist [illegible] öfters ein Bruch. Soll aber a oder x eine ganze Zahl seyn, denn muß der $a=\frac{\mu A\mp C}{B}$ ist $\mu A\mp C = \nu B$ seyn [illegible] statt μ $\mu=\frac{\nu B\pm C}{A}$ dies in a [illegible] setzt giebt $a=\frac{\left(\frac{\nu B\pm C}{A}\right)A\mp C}{B}$

$a=\nu$

[illegible] zu keinen Resultaten führt, weil nur die Bruchform [illegible] [illegible] können.

dieser muß in diesem Fall [illegible] das [illegible] Verfahren [illegible] werden.

einen gemeinschaftlichen Faktor enthalten, soll aber auch

zugegeben [?], d. Voraussetzung [?] $A > B$ daß der Nenner u. d. Faktor von

x noch keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.

nachdem man nämlich alle Zahlen durch ihren größten

gemeinschaftlichen Theiler getheilt hat, daß sie [?] Form

zu bringen [?]. Man setzt wenn hier x eine ganze

Zahl a, u. nimmt an daß eine [?] für y eine ganze

Zahl findet, so ist wenn $y = \frac{Ba \pm C}{A} = b$ = ganze Zahl ist,

$$\frac{Ba \pm C}{A} = b$$

$$Ba \pm C = bA$$

$$\pm C = bA - Ba$$

Nimmt man nun an daß A u. B noch ein gemeinschaftliches

Maaß haben, welches hier μ seyn mag z.B. daß $A = \mu D$

u. $B = \mu E$ seye, so ist

$$\pm C = b\mu D - a\mu E. \text{ und}$$

$$bD - aE = \pm \frac{C}{\mu}$$

da nun nach d. Voraussetzung C keinen gemeinschaftlichen

Theiler mit A u. B hatte, so ist $\frac{C}{\mu}$ ein Bruch [?] ein

Widerspruch. weil die Voraussetzung war daß C eine ganze Zahl ist

Sind daher A u. B [?] [?], so ist y eine

ganze Zahl.

Hier war nun die Voraussetzung daß $A > B$ seye; wir

Klarer wird dieser Widerspruch nur auf folgende Weise: $\frac{Bx \pm C}{A}$, ist darin B und A theilbar durch n, so ist Bx ein [?] von irgend einer Größe G, dieses Verhältniß wird durch C verdorben, weil es eine Zahl [?] A nicht divisible ist, daher Zähler und Nenner nicht mehr divisible, und die Bruchform unvermeidlich

Ist es der Fall, so sey z. B.

$$y = \frac{59x \pm 7}{11}$$

$$11y = 59x \pm 7$$

$$x = \frac{11y \mp 7}{59}$$

d. h. man sucht den Werth von x so daß man statt dessen einen Werth nach dem andern setzt.

oder man setzt: bey

$$y = \frac{59x \pm 7}{11} \; ; \; y = 5x + \frac{4x \pm 7}{11}$$ d. h.

man dividirt den Factor von x durch den Nenner und macht aus dem Ganzen eine 2theilige Größe.

Um nun zu bestimmen was für x für eine Zahl gesetzt werden muß, um einen Werth von y zu erhalten der eine ganze Zahl ist, wird man nun die Lehre von den Kettenbrüchen in Anwendung bringen. Wenn man nämlich auf die schon oben angegebene Art für d. Bruch $\frac{A}{B}$ wo man den ganzen Nenner d. Zähler, d. ~~für~~ den Factor von x als Nenner angenommen hat, die ganze Reihe d. Quotienten entwickelt, so wird man wenn man hiervon die letzten Kettenbrüche entwickelt, wiederum wie schon oben angemerkt einen Zähler = A, und einen Nenner = B erhalten.

Hat man z. B. erhalten $y = \frac{286x + 806}{1099}$

so ist $A = 1099$; $B = 286$; u. $C = 806$;

behandelt man nun den Bruch wie angegeben, so ist

286	
1099	3
858	
241	1.
286	
241	
45	5
241	
225	
16	2
45	
32	
13	1
16	
13	
3	4
13	
12	
1	3
3	
3	
0	

Quotient.	Zähler	Nenner
-	1	0
3	3	1
1	4	1
5	23	6
2	50	13
1	73	19
4	$342 = \gamma$	$89 = \delta$
3	$1099 = A$	$286 = B$.

Eine solche Operation kann man nur in allen solchen Gleichungen vornehmen wo jene Bedingungen obwalten, man braucht dann die Näherungswerthe des angegebenen Bruchs bis zum vorletzten Zähler welcher γ u. dessen Nenner δ heißen soll. Hat man auf diese Art γ bestimmt u. multiplicirt es mit der ganzen bestimmten Zahl C, so wird man ein Quot. erhalten wenn man das Product durch die ganze Zahl A dividirt, welcher m

eine gegebene Zahl und einem Bruch bestehen kann. also

$$\frac{Cy}{A} = Q + \frac{R}{A};$$

worin Q ebenfalls $= 0$ werden kann wenn $A > Cy$

Ist nun eine ähnliche Gleichung gegeben, u. man will eine Zahl bestimmen welche man für x setzen muß so darf es nur noch unterscheiden ob die Gleichung der Form nach $y = \frac{Bx+C}{A}$ od. $y = \frac{Bx-C}{A}$ und ferner ob y durch eine gerade od. ungerade Anzahl v. Quotient bestimmt wurde.

Mit Beobachtung dieser Unterschiede ist das practische Verfahren ohngefähr folgendes.

I/ Ist $y = \frac{Bx+C}{A}$ gegeben und

a) der Zähler y ist aus einer gerade Anzahl Quotienten bestimmt worden so ist $x = A - R$.

b) ist dag. y aus ungerade Anzahl Quot. entstanden so ist $x = R$.

d. h. im ersten Falle soll statt x eine Zahl setzen wenn es vom Nenner den obigen Rest abzieht, u. im 2t Fall den Rest selbst.

II Ist $y = \frac{Bx-C}{A}$ gegeben und

a) die Anzahl d. Quot. stimmt gerade so ist

$x = R$.

ist b) die Anzahl d. Quot. ungerade so ist
$x = A - R$ genommen werden [illegible].

Zuförderst die Praktische, dann die Theoretische.

Im obigen Beispiel ist gegeben . $y = \frac{Bx + C}{A}$ also

I.) $y = \frac{286x + 806}{1099}$. darin ist $A = 1099$. $B = 286$
$C = 806$, und nach dem aufgelösten Beispiele ist $\gamma = 342$
als einen geraden Quotient (d 6ten) bestimmt. also ist

$$\frac{\gamma C}{A} = \frac{342 \times 806}{1099} = Q + \frac{R}{A} = \frac{275652}{1099} = 250 + \frac{902}{1099}$$

u also $R = 902$. es ist also nach I. a.

$x = A - R$; $x = 1099 - 902 = 197$ u demnach

$$y = \frac{286 . 197 + 806}{1099} = \frac{56342 + 806}{1099} = \frac{57148}{1099} = 52.$$

welches durch eine ganze Zahl ausgedrückt

ist $y = \frac{286x - 806}{1099}$
so ist $R = 902$
also $y = \frac{286 . 902 - 806}{1099}$
$y = \frac{257972 - 806}{1099}$
$y = \frac{257166}{1099} = 234.$

Ist dagegen

b) $y = \frac{183x + 127}{520}$ also $A = 520$; $B = 183$; $C = 127$.

so wird $\frac{A}{B} = \frac{520}{183}$

183
520 | 2
366
154 | 1
183
154
29 | 5
154
145
9 | 3
29
27
2 | 4
9
8
1 | 2
2
2
0

Quot.	Zähler	Nenner
	1	0
2	2	1
1	3	1
5	17	6
3	54	19
4	233 = γ	82 = δ
2	520 = A	183 = B

Hier also daß durch 5 Quotienten bestimmte $y = 233$

und $\frac{yC}{A} = Q + \frac{R}{A}$; $= \frac{233.127}{250} = \frac{29591}{250} = Q + \frac{R}{A}$

$= 56 + \frac{471}{520}$ und also $R = 471 = x$ (ungerade Quot.) und also:

$y = \frac{183.471 + 127}{520} = \frac{86193 + 127}{520} = \frac{86320}{520} = 166$ und

wie verlangt worden eine ganze Zahl.

Wenn nun noch II in der Hauptformel $+C = -C$ ist, so

gelten die II gegebenen Regeln a und b. 76.

$y = \frac{47x - 1331}{252}$ so wird $A = 252$; $B = 47$; und $C = 1331$.

$\frac{A}{B} = \frac{252}{47}$ also

$$\begin{array}{r|l} 47 & \\ 252 & 5 \\ 235 & \\ \hline 17 & 2 \\ 47 & \\ 34 & \\ \hline 13 & 1 \\ 17 & \\ 13 & \\ \hline 4 & 3 \\ 13 & \\ 12 & \\ \hline 1 & 4 \\ 4 & \\ 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Quot.	Zähler,	Nenner
5	1.	0.
5	5.	1.
2	11.	2
1	16	3
3	$59 = \gamma$	$11 = \delta$
4	$252 = A$	$47 = B$.

Demnach ist die eine gerade Zahl Quot. bestimmt ist 4;

und daher $x = R \mp \frac{\gamma C}{A} = \frac{59.1331}{252} = \frac{78529}{252} = 311 + \frac{157}{252}$ und

also $x = 157$. demnach $y = \frac{Bx - C}{A} = \frac{47.157 - 1331}{252} =$

$\frac{7379 - 1331}{252} = \frac{6048}{252} = 24$ = einer ganzen Zahl

wie man verlangte.

Ist dagegen $y = \frac{202x - 39}{467}$ gegeben, so wird

$A = 467$; $B = 202$; $C = 39$; u. $\frac{A}{B} =$

202 | 467 | 2
404
63 | 202 | 3
189
13 | 63 | 4
52
11 | 13 | 1
11
2 | 11 | 5
10
1 | 2 | 2
2
0.

Quotient.	Zähler	Nenner
	1.	0
2	2	1
3	7	3
4	30	13
1	37	16
5	$215 = \gamma$	$93 = \delta$
2	$467 = A$	$202 = B$

Hier ist ein ungerader Quotient entstanden

daher $x = A - R$; $\frac{\gamma C}{A} = Q + \frac{R}{A}$;

$\frac{215 \cdot 39}{467} = \frac{8385}{407} = 17 + \frac{446}{467}$ u. also $R = 446$. daher

$x = 467 - 446 = 21$ und endlich

$y = \frac{21 \cdot 202 - 39}{467} = \frac{4203}{467} = 9.$

Der Beweis dieser durch Beyspiele erläuterten Regeln würde sich nun auch auf vier Fälle erstrecken müssen da wir 4 Regeln erhalten haben. Bey allen wird aber nur zu zeigen seyn daß die Größe R durch $\frac{\gamma C}{A}$ bestimmt würde, es war aber:

$\frac{\gamma C}{A} = Q + \frac{R}{A}$ daher; $R = \gamma C - AQ$.

Man rechne die Näherungsbrüche zurück. Bei unserem ersten Beispiel waren

Quot	Zähler	Nenner
	1	0
3	3	1
1	4	1
5	23	6
2	50	13
1	73	19
4	342	89
3	1099	286.

Bekannt ist daß

1) der 1te Näherungsbruch zu ~~groß~~ klein, der 2te ~~klein~~ groß u. s. f.

2) daß man jeden Näherungsbruch als gegebenen Hauptbruch ansehen werden kann, und dann die vorhergehenden Näherungsbrüche als zu diesem Hauptbruch gehörig gefunden werden ~~[illegible]~~ dürften.

3) daß aus den vorhergehenden Zähler und Nenner nebst dem folgenden Quotienten der folgende Zähler und Nenner bestimmt wird; daß wenn man den ersten Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ die folgenden ~~[illegible]~~ setzt, daß der folgende welcher als Hauptbruch angesehen werden konnte durch A u. B bezeichnet würde, daß ich also wenn ich z. B. den Bruch $\frac{23}{6}$ als Hauptbruch ansehen will ihn durch A u. B bezeichne, und daß ich hierauf

$\alpha = 3$; $\beta = 1$; $\gamma = 4$; $\delta = 1$; $A = 23$; $B = 6$ setzen kann u. s. w.

4) daß ein Näherungsbruch von einem vorhergehenden abgezogen einen Bruch gibt, dessen Zähler immer Eins ist, und dessen Nenner das Produkt der beiden betreffenden Nenner war, daß also $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{A}{B} =$

$$\frac{\gamma B - A\delta}{\delta B} = \frac{\pm 1}{\delta B}$$

war. Hier werden Beyspiele sind.

1) $\frac{3}{1} - \frac{4}{1} = -\frac{1}{1}$

2) $\frac{4}{1} - \frac{23}{6} = \frac{24-23}{6} = \frac{+1}{6}$

3) $\frac{23}{6} - \frac{50}{13} = \frac{299-300}{78} = \frac{-1}{78}$

4) $\frac{50}{13} - \frac{73}{19} = \frac{950-949}{247} = \frac{+1}{247}$

5) $\frac{73}{19} - \frac{342}{89} = \frac{6497-6498}{1691} = -\frac{1}{1691}$

6) $\frac{342}{89} - \frac{1099}{286} = \frac{97812-97811}{25454} = \frac{+1}{25454}$.

Sucht er nun für das Gesetz d. Wechselfolge, so bemerkt man daß bei der hier gemachten Bedingung, daß der Nenner kleiner als d. Zähler bei ein nächster Bruch zum Grunde gelegt ist, so wird der erste Näherungsbruch zu ~~groß~~ klein, der 2te zu ~~klein~~ groß u. s. w. † auch bei 1) $\gamma B < \delta A$ ‡ also wenn er bloß A ihren Zähler bricht. $\gamma B - \delta A = -1$.

bei 2) $\gamma B > \delta A$, d. $\gamma B - \delta A = +1$

bei 3) $\gamma B < \delta A$ d. $\gamma B - \delta A = -1$

4) $\gamma B > \delta A$ d. $\gamma B - \delta A = +1$ etc.

Daraus folgt also wenn man einen geraden vom ungeraden Näherungsbruch abzieht, ein -1 als Rest im Zähler erscheint.

† so daß immer die der Ordnung nach geraden Brüche zu groß, die ungeraden zu klein

‡ denn $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{A}{B}$ als ungerader Bruch gegen einen geraden also $\frac{\gamma B < \delta A}{\delta B}$

und umgekehrt γ1.

Nun ist der für y stehende Bruch leicht zu ~~finden~~ übersehen.

Der Hauptfall war $y = \frac{Bx \pm C}{A}$, wo ~~für~~ fast 2 Bedingungen durch das ± Zeichen u. für jeden einzelnen Fall bemerke, ob x die gerade od. ungerade Angeh. Quot. vorstellen soll, daher wird 2 Fälle.

Wenn also.

I $y = \frac{Bx + C}{A}$ u. x durch eine gerade Angeh. Quot. vorstellend, so sollte $x = A - R$ genommen werden, substituirt

$$y = \frac{B(A-R)+C}{A} = \frac{AB - BR + C}{A}$$ aber war nun

$R = \gamma C - AQ$ (Seite 215) daher:

$$y = \frac{AB - B(\gamma C - AQ) + C}{A} = \frac{AB - B\gamma C + ABQ + C}{A} =$$

$$= B + BQ + \frac{-\gamma BC + C}{A} = B + BQ - \frac{\gamma BC + C}{A};$$

Da nun hier B u. BQ ganze Zahlen sind, so bleibt nun zu untersuchen ob $\frac{\gamma BC + C}{A}$ auch eine ganze Zahl ist.

Es würde hier A eine gerade Angeh. Quot. bestimmt, u. dann war: $\gamma B - \delta A = +1$, u. also auch

$$\gamma BC - \delta AC = C;$$

$$\gamma BC - C = \delta AC.$$ in obigen Bruch den Werth gesetzt

so ist $\frac{\gamma BC - C}{A} = \frac{\delta AC}{A} = \delta C$ *) es war nun

$y = B + BQ - \delta C$, und da nun δ der Natur gem

*) denn $\frac{-\gamma BC + C}{A} = +\left(\frac{C + \gamma BC}{A}\right)$ [struck through] $= -\left(\frac{\gamma BC - C}{A}\right) = -\delta C$

Nachdem auch $\frac{\delta}{\delta}$ ist, so ist es eine ganze Zahl und mithin $y =$ einer ganzen Zahl.

in I. b. wurde γ als ungerade Anzahl Quot. bestimmt (siehe) denn war aber $\gamma B - \delta A = -1$; und $x = R$.

$$y = \frac{BR + C}{A} = \frac{B(\gamma C - AQ) + C}{A} = \frac{\gamma BC - ABQ + C}{A} =$$

$= -BQ + \frac{\gamma BC + C}{A}$, da nun $\gamma B - \delta A = -1$ war, ist

$\gamma BC - \delta AC = -C$ und

$\gamma BC + C = \delta AC$. daher

$$y = -BQ + \frac{\delta AC}{A} = \delta C - BQ$$ einer ganzen Zahl

II Zweiter Fall.

a) $y = \frac{Bx - C}{A}$ u. γ eine gerade Anzahl v. Quot:

so ist $x = R$.

$$y = \frac{BR - C}{A}; = \frac{B(\gamma C - AQ) - C}{A} = \frac{B\gamma C - ABQ - C}{A}.$$

$$= -BQ + \frac{B\gamma C - C}{A}.$$

Weil γ gerade Anzahl war; so ist auch wieder $\gamma B - \delta A = 1$

$\gamma BC - \delta AC = C$, u. $\gamma BC - C = \delta AC$. daher

$$y = -BQ + \frac{\delta AC}{A} = \delta C - BQ = \text{ganze Zahl.}$$

b). $y = \frac{Bx - C}{A}$ u. γ die ungerade Zahl Quotient

war $x = A - R$. und daher. $y = \frac{B(A - R) - C}{A} =$

$$= \frac{BA - B\mathfrak{z} - C}{A} = \frac{BA - B(\gamma C - A\alpha) - C}{A} =$$

$$= \frac{BA - B\gamma C + AB\alpha - C}{A} = B + B\alpha - \frac{B\gamma C + C}{A}$$

Da hier ß [zu] gerade war, so ist

$\gamma B - \delta A = -1$. & $\gamma BC - \delta AC = -C$;

$\gamma BC + C = \delta AC$, daher

$y = B + B\alpha - \frac{\delta AC}{A} = B + B\alpha - \delta C$. eine ganze Zahl. —.

Diese hier gegebene Art den x zu bestimmen ist aber ungemein weitläufig, u. die Ausdrücke enthält A zu viele Stücke, zu sehr gespannt[?]. Daher wird es auch lieber folgende kürzere Methode u. die Anwendung bedienen.

Gegeben. $y = \frac{47x - 1331}{252}$.

Soll hier y eine ganze Zahl seyn, so verlangt diese Methode daß man den Nenner so auszudrücken sucht, daß er kleiner als der Factor von x werde, dies kann leicht durch Umkehrung der Gleichung geschehen, denn [bringt] man aber unbedingt die Gleichung so stellen, daß gewisse Größe von x, oder überhaupt die unbekannte Größe erscheinen; und dann ein Bruch bleibt den man wiederum als eine ganze Zahl ausdrücken kann, u. so fortfahren bis alle Brüche weg,

Dieser Beweis genügt wohl die Einsicht zu erhalten, daß wenn man statt x, den angegebenen Werth setzt, für y eine ganze Zahl heraus kömmt, allein er zeigt nicht an, wie man darauf gekommen ist, diesen Werth statt x zu setzen, und warum man nicht andere Werthe setzen könnte. Es ist ein Wahrscheinlichkeits[?] ein Glaubensartikel. Ein gewisses Licht, wie man zu dieser Verfahrungsart gekommen ist, verbreitet aber die folgende Bemerkung.

A

B

Schreiben sind. z. B.

$$y = \frac{47x - 1331}{252}$$

$$x = \frac{252y + 1331}{47} = 5y + 28 + \frac{17y + 15}{47}$$, dieser

Bruch $\frac{17y+15}{47} = A$. so ist. $y = \frac{47A - 15}{17}$.

$$x = \frac{252y + 1331}{47}$$

$y = 2A + \frac{13A - 15}{17}$; $\frac{13A-15}{17} = B$; $A = \frac{17B + 15}{13}$.

$A = B + 1 + \frac{4B + 2}{13}$; $\frac{4B+2}{13} = C$; $B = \frac{13C - 2}{4}$;

$B = 3C + \frac{C - 2}{4}$; $\frac{C-2}{4} = D$. ; $C = 4D + 2$.

$C = 4D + 2$.

die Nenner stehen bei dieser Operation wie leicht zu übersehen ist stets kleiner werden, bis endlich die Bruchformen ganz wegfällt, und C eine durch D bestimmte ganze Zahl wurde.

Substituirt man rückwärts für D angenommene Werthe so ist:

für D		C		B		A		y		x	
= 0	1	2	4	6	13	9	17	24	47	157.	252
= 1		6		19		26		71		409	
2		10		32		43		118		661	
3		14		45		60		165		913.	
4		18		58		77		212		1165	
5		22		71		94		259		1417.	

So

So ist es nun völlig einerley ob x durch y, od. y durch x bestimmt würde, da man nach einer ganzen Zahl für y sucht, welche der Aufgabe entspricht.

Betrachtet man diese Columnen D, C, B etc. so wird man in ihren wechselseitigen Reihenstücken, die bey D um 1, bei C um 4 bei B um 13 bei A um 17. bei y um 47, u. bei x um 252 fortschreiten. Sie also weiter zu entwickeln ist leicht. Man bemerkt ferner daß diese Fortschreitung in der Columne allemal mit dem Nenner des Bruchs durch welchen die Column bestimmt wurde übereinstimmt, und ist dabei ein nothwendiger Erfolg, indem der Bruch eine ganze Zahl seyn soll, und also nur durch Hinzufügung des einfachen od. mehrfachen Nennerwerthes in diesem gesucht werden kann. Hat man längere Columnen entwickelt, so kann man auch kürzer verfahren, indem D überall durch Substitution einbringt:

$$C = 4D+2.$$
$$B = 12D+6 + \frac{4D+2-2}{4} = 13D+6.$$
$$A = 13D+6+1+\frac{52D+24+2}{13} = 13D+7+4D+2 = 17D+9$$
$$y = 34D+18+\frac{221D+117-15}{17} = 34D+18+13D+6 = 47D+24.$$
$$x = \frac{11844D+6048+1331}{47} = 252D+157.$$

Setzt man hier $D = 5$ z.B. so wird $y = 5.47+24 = 259$ wie oben;
$x = 5.252+157 = 1417$

Beyspiele für unbestimmte Aufgaben.

Jemand hat 3 Sorten Wein, wovon die Sorte A kostet der Eimer 12 fl., von B. 10 fl. von C. 6 fl. Es soll eine Anzahl gemischt werden von 60 Eimern, wovon der Eimer 9 fl. kostet.

x sey die Anzahl von d. Sorte A.

y ——————— B.

z ——————— C.

$x+y+z = 60$ und $12x+10y+6z = 9.60 = 540.$

I. $x = 60-y-z$ und

$12.60-12y-12z+10y+6z = 540.$

$720-2y-6z = 540.$

$360-y-3z = 270$

$y = 90-3z$. ——— α.

Setzt und I.

$x = 60-90+3z-z.$

$x = 2z-30$. ——— β.

Soll nun y und x eine + ganze Zahl werden so ist in α nothwendig $90 > 3z$; $30 > z$; und in β $2z > 30$, oder $z > 15$ seyn.

Daher also wenn

$z =$	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.
so ist $x =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22.	24.	26.	28
u. $y =$	42.	39.	36.	33.	30.	27.	24.	21.	18.	15.	12.	9.	6.	3.

Das Gesetz d. Fortschreitung hier ist merkwürdig, da x von z abhängig ist, so z um 1 wächst so steigt x um 2 wachsen, u. umgekehrt da y von −3z abhängig ist so steigt es um 3 fallen.

Diese Aufgabe ist sehr gut und künstlich behandelt. Man könnte sie auch so auflösen. Wir nennen die Eimer x, y und 60−x−y so ist

$12x+10y+6(60-x-y) = 60.9$

$6x+4y = 180$

$y = \frac{180-6x}{4} = \frac{90-3x}{2} = 45-x-\frac{x}{2}$

$-\frac{x}{2} = A$, giebt $x = -2A$

$y = 45+2A+\frac{2A}{2}$ $y = 45+3A$

d.h. der zu ansetzende Werth für A soll seyn −1, −2, −3 u.s.w. dann wird in diesen Fällen wird x eine ganze Zahl und positiv, A=0 darf nicht genommen werden weil es der Aufgabe widerspricht.

$A=-1$ $x=2$ $y=42$ $z=16$

$A=-2$ $x=4$ $y=39$ $z=17$ u.s.f.

Die Werthe für A werden so lange fortgesetzt bis ein Werth von y oder z = 0 wird, was der Aufgabe widerspricht. z.B.

$A=-14$, $x=28$ $y=3$ $z=29$

$A=-15$ $x=30$ $y=0$ $z=30$

also läßt die Aufgabe 15 Auflösungen zu

2te Aufgabe.

Unter 2 Familien von denen die eine aus 7 die andere aus 11 Personen besteht, sollen 100 ƒ so vertheilt werden daß jede Person in jeder einzelnen Familie eine gleiche Anzahl voller Thaler bekömmt.

Bekömmt einer in der ersten Familie x u. in der 2ten y.

so ist $7x + 11y = 100$

$$x = \frac{100-11y}{7} = 14 - y + \frac{2-4y}{7}$$

Hier kann ich nun nicht unmittelbar den Bruch = einer ganzen Zahl A setzen, denn für den geringsten Werth von y ist $=1$. würde der Bruch einen $-$ Werth erhalten, wir müssen also einen $-$ Werth für den Bruch annehmen.

$x = \frac{100-11y}{7}$; $\frac{2-4y}{7} = -A$; $-y = \frac{-7A-2}{4}$; $y = \frac{7A+2}{4}$.

$y = A + \frac{3A+2}{4}$; $\frac{3A+2}{4} = B$; $A = \frac{4B-2}{3}$; $= B + \frac{B-2}{3}$.

$A = B + \frac{B-2}{3}$; $\frac{B-2}{3} = C$; $B = 3C+2$.

$B = 3C+2$.

Hier ist also der Werth von x u. y durch C bestimmt, u. setzen wir:

C.	B.	A.	y.	x.
= 0	2	2.	4.	8
= 1.	5.	6.	11.	−3.

Hier und -3 sieht man daß diese Aufgabe nur ein bestimmtes einziges Resultat hat, welches aber bei unbestimmten Aufgaben selten der Fall ist. —

Dieses ist aber nicht nothwendig, indem es sich auch durch Subtraktion ausgeben muß z. B.

$x = \frac{100-11y}{7} = 14 - y + \frac{2-4y}{7}$

$A = \frac{2-4y}{7}$ oder $-7A = -2+4y$

giebt $y = \frac{2-7A}{4} = -A + \frac{2-3A}{4}$

$\frac{2-3A}{4} = B$ oder $-2+3A = -4B$

giebt $A = \frac{2-4B}{3} = -B + \frac{2-B}{3}$

$\frac{2-B}{3} = C$ giebt $B = 2-3C$ die Werthe restituirt

$A = -2+4C$

$y = 4-7C$

$x = 8+11C$

Hier ersieht man daß für C nur 0 genommen werden kann denn $C = A$ giebt für y − Werth, $C = -A$ giebt für x − Werth, auch daraus ersichtlich ist dieses daß Aufgaben nur bestimmt ist.

Eine andere Auflösung dieser Aufg: ist folgende. Aus den 5 Gl: [illegible] erhält man folgende 4.

$5m+1 = 7n+6 \quad m = \frac{7n+5}{5}$

$5m+1 = 8p+1 \quad m = \frac{8p}{5}$

$5m+1 = 9q+5 \quad m = \frac{9q+4}{5}$

$5m+1 = 11r+8 \quad m = \frac{11r+7}{5}$

daraus ergeben sich drei Gl:

$7n+5 = 8p \quad n = \frac{8p-5}{7}$

$7n+5 = 9q+4 \quad n = \frac{9q-1}{7}$

$7n+5 = 11r+7 \quad n = \frac{11r+2}{7}$

daraus ergeben sich zwei

$8p-5 = 9q-1 \quad p = \frac{9q+4}{8}$

$8p-5 = 11r+2 \quad p = \frac{11r+7}{8}$

daraus die letzte Gl. von 2 Unb:

$9q+4 = 11r+7$

$q = \frac{11r+3}{9} = r + \frac{2r+3}{9}$

$r = \frac{9A-3}{2} = 4A-1+\frac{A-1}{2}$

$A = 2B+1$ resultirt

$r = 9B+3$

$q = 11B+4$

$p = \frac{9.11B}{8}+5$

$n = \frac{9.11B}{7}+5$

$m = \frac{9.11B}{5}+8$

woraus sich ergiebt daß für B=0 die Reihen m n etc sich sogleich ergeben sonst darf für B, der kein Bruch statt finden soll bloß das 8.7.5 fache gesetzt werden. —

3te Aufgabe.

Ein Offizier hat einige Soldaten, wenn er jedes Glied zu 5 Mann stellt, so bleiben ihm 1 Mann übrig, nimmt er 7 Mann so bleiben 6 übrig; nimmt er 8, so bleibt 1 Mann nimmt er 9 so bleiben 5; nimmt er 11 in jedes Glied so bleiben 8 Mann übrig. Wie viel Soldaten?

Die Anzahl d. Soldaten sey = x, und da auch die Zahl der Glieder unbekannt sind, so sollen auch hier sie die nach einander folgenden Gliederzahlen m. n. p. q. r seyn, und ist daher:

$5m+1 = x \; ; \; 7n+6 = x \; ; \; 8p+1 = x \; ; \; 9q+5 = x ; 11r+8 = x$

und hieraus ist

$m = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}; \; n = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}; \; p = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}; \; q = \frac{1}{9}x - \frac{5}{9}; \; r = \frac{1}{11}x -$ [illegible]

die Anzahl der Glieder m. n. p. q. r ist nun nothwendig eine ganze Zahl [illegible] daher kann ich schliessen

$m+n+p+q+r = y$. und also auch $y =$ den entsprechenden [illegible] von m n p . . , daher.

	27720
$\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$	5544x − 5544
$\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$	3960x − 23760
$\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$	3465x − 3465
$\frac{1}{9}x - \frac{5}{9}$	3080x − 15400
$\frac{1}{11}x - \frac{8}{11}$	2520x − 20160

$\frac{18569x - 68329}{27720} = y$. um die Auflösung besser

von Augen zu haben nennen so $y = A$. und also

$$x = \frac{27720A + 68329}{18569} = A + 3 + \frac{9151A + 12622}{18569};$$

Setzt man $\frac{9151A + 12622}{18569} = B$ so ist $A = \frac{18569B - 12622}{9151} = 2B - 1 + \frac{267B - 3471}{9151}$.

$$A = 2B - 1 + \frac{267B - 3471}{9151}; \quad \frac{267B - 3471}{9151} = C; \quad B = \frac{9151C + 3471}{267} = 34C + 13 + \frac{73C}{267}$$

$$B = 34C + 13 + \frac{73C}{267}.$$

Da nun hierselbst kein 2theiliger Zähler und Nenner wie auch in d. Anwendung häufig eintritt, wird hier auch $\frac{73C}{267}$ eine ganze Zahl seyn müssen mithin C also immer den [illegible] Werth des Nenners haben müssen. Man könnte zwar auch fortfahren, u. den Werth C [illegible] bestimmen, doch wird es hier zweckmäßiger seyn den Werth des Nenners für C zu substituiren, u. außerdem kann man auch [illegible] den Nullwerth $C = 0$ anfangen.

C	B	A	x
0	13	25.	41.
267.	9164.	18594	27761.
534	18315.	37163.	55481.

4te Aufgabe.

Ein Bauer geht mit 100 ℛ zu Markte, dafür will er 100 Stück Vieh; Kühe, Schafe und Schweine kaufen. Eine Kuh kostet 10 ℛ ein Schwein 3 ℛ und ein Schaf ½ ℛ.

Wie viel erhält er von jeder Sorte?

Wenn er x Kühe y Schweine u. z Schafe hat, so ist.

Man vergleiche die Auflösung einer ähnlichen Aufgabe p. 235. Aus dieser aber ist zu ersehen, wie man jedesmal die Grenzen bestimmen kann innerhalb welcher sich der Werth für z bewegen muß, um für z, y, x ganze und positive Werthe zu geben.

I $x + y + z = 100.$

II $10x + 3y + \frac{1}{2}z = 100.$

$x = 100 - y - z.$

$1000 - 10y - 10z + 3y + \frac{1}{2}z = 100.$

$1000 - 7y - \frac{19}{2}z = 100.$

$7y = 900 - \frac{19}{2}z.$

$y = \frac{1800 - 19z}{14}$ und in I ——— α

$x = 100 - \frac{1800 - 19z}{14} - z.$

$x = \frac{1400 - 1800 + 19z - 14z}{14}$

$x = \frac{5z - 400}{14.}$; — — — — β.

da y u. x in α u. β + ganze Zahlen seyn müssen so muß nothwendig in α. $1800 > 19z$ seyn. u. $z < \frac{1800}{19} =$ $z < 94\frac{14}{19}$; und in β. $5z > 400$; $z > 80$. so daß also d. Werth zwischen 81 und 94 liegt.

$y = \frac{1800 - 19z}{14} = 128 - z + \frac{8 - 5z}{14.}$

$\frac{8 - 5z}{14} = A$; $z = \frac{14A + 8}{5} = 2A + 1 + \frac{4A + 3}{5.}$

$\frac{4A + 3}{5} = B$; $A = \frac{5B - 3}{4} = B + \frac{B - 3}{4}$

$\frac{B - 3}{4} = C$; $B = 4C + 3.$

$z = 2A + 1 + \frac{4A + 3}{5.}$

$A = B + \frac{B - 3}{4}.$

$B = 4C + 3.$

und daher bei

C	B	A	z	y	x
0	3.	3.	10.	115.	−25
1	7.	8.	24.	96.	−20
2	11	13	38	77	−15
3	15	18	52	58	−10
4	19	23	66	34	−5
5	23	28	80	20	−0
6	27	33	94	1	+5
7	31	38	108	−18	+10
8	35	33	122	−37	+15.

Hier sieht man leicht daß nur die Werthe $z = 94$, $y = 1$. $x = 5$, die wahren seyn können, weil aus den andern Werthen auch negative Werthe entspringen.

Es zeigt sich wie man die Werthe dieser eigentlich bestimmten Gleichung hätte unmittelbar finden können, und diese könnte man aus ferner abgeleiteten Schlüssen die Grenzen in welchen A, B, & C liegen, indem es geschlossen hätte.

Es müsste $z = \frac{14A+8}{5} < 94\frac{14}{19}$ & $z = \frac{14A+8}{5} > 80$.

$A < \frac{5(94\frac{14}{19})-8}{14}$ $\qquad A > \frac{400-8}{14}$

$A < 33\frac{5}{19}$ $\qquad A > 28$

daraus ist $A = \frac{5B-3}{4} < 33\frac{5}{19}$ & $\frac{5B-3}{4} > 28$.

$B < \frac{4(33\frac{5}{19})+3}{5}$ $\qquad B > \frac{4\cdot 28+3}{5}$

$B < 27\frac{6}{95}$ und $\qquad B > 23$

hieraus $B = 4C+3 < 27\frac{6}{95}$ und $\qquad 4C+3 > 23$

$C < 6\frac{3}{190}$ $\qquad C > 3$. Da also größer

$6\frac{3}{190}$ und d. Zahl 5, Ellingen muß, so kann d. [illegible]

ganze Zahl nur 6 seyn.

5te Aufgabe.

Die andere Methode ist folgende

$\frac{x}{y}$ $14X+11y+270-9X-9y=360$

$30-x-y$ $5X+2y=90$

$y=\frac{90-5X}{2}=45-2X-\frac{X}{2}$

$X=-2A$

$y=45+5A$

$Z=-15-3A$

So muß daher A negativ genommen werden und zwar der-mit $5A<45$ oder $A<9$ und $-3A>-15$ oder $A>5$

daher kann A nur $=-6$
$=-7$
$=-8$

woraus sich die Werthe für x und y successive ergeben

$A=-6$ $X=12$ $y=15$ $Z=3$

$A=-7$ $X=14$ $y=10$ $Z=6$

$A=-8$ $X=16$ y 5 $Z=9$

Ein Münzmeister hatte einige Stücke Silber jedes eine Mark schwer an Gewicht. einige sind 14 löthig, andere 11 löthig noch andere 9 löthig. Er soll eine Masse 30 Mark schwer verarbeiten, die 12 löthig ist, wie viel hat er von jedem Stücke zu nehmen?

I $x+y+z=30.$

II $14x+11y+9z=12.30.$

$x=30-y-z.$

$14.30-14y-14z+11y+9z=360.$

$60=3y+5z.$

$y=20-\frac{5}{3}z.$

$x=10+\frac{2}{3}z$

damit x u. y ganze Zahlen vorkommen sollen, so kann z nur eine durch 3 theilbare Größe genommen werden.

das x [illegible] aber wenn y + bleiben soll $20>\frac{5}{3}z$ also $z<12.$

und hiernach sind nur 3 Auflösungen.

für $z=3.=6.—9;$
$y=15.=10.—5;$
$x=12.=14.—16.$

6te Aufgabe

Jemand hat 3 Sorten Wein von der ersten kostet das Quart 24 gr von d. 2ten 18 gr von d. 3ten Sorte 12 gr. er will sie so mischen daß er das Quart für 15 gr geben kann. Wie viel von jeder Sorte?

Da die Mischung ein Quart werden soll, so müssen die nothwendig Theile des Quarts also Brüche zum Vorschein kommen.

I $x + y + z = 1$.

II $24x + 18y + 12z = 15$.

$x = 1 - y - z$.

$24 - 24y - 24z + 18y + 12z = 15$.

$9 - 12z = 6y$.

$y = \frac{3}{2} - 2z$ und

$x = z - \frac{1}{2}$

Es ist also $\frac{3}{2} > 2z$; $z < \frac{3}{4}$ und $z > \frac{1}{2}$.

Also alle Brüche die zwischen $\frac{3}{4}$ u. $\frac{1}{2}$ liegen also ∞ thun dieser Aufgabe genüge. wie z. B.

$z = \frac{5}{8}$ so ist $y = \frac{2}{8}$; $x = \frac{1}{8}$ Summa 1.

$24 \cdot \frac{1}{8} + 18 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{5}{8} = 3 + 4\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 15$.

Es giebt nun auch unbestimmte Aufgaben, welche bey der Auflösung zu Gleichungen höherer Grade führen.

x
y
$1 - x - y$

$24x + 18y + 12 - 12x - 12y = 15$

$12x + 6y = 3$

$4x + 2y = 1$

$y = \frac{1 - 4x}{2} = \frac{1}{2} - 2x$

$x = a$

$y = \frac{1}{2} - 2a$

$z = +\frac{1}{2} + a$

Da $x + y + z = 1$ sind, so muß a ein ächter positiver Bruch sein und zwar $<$ als $\frac{1}{2}$ wegen z und kleiner als $\frac{1}{4}$ wegen y.

Daß wenn $x = \frac{2a}{2}$

$y = \frac{2 - 4a}{2}$

$z = \frac{1 + 2a}{2}$

so muß $4a < 2$ also $a < \frac{1}{4}$

ebenso $2a < 1$ also $a < \frac{1}{2}$

Es genügen also alle Brüche unter $\frac{1}{4}$ z. B. $\frac{1}{5}$

$x = \frac{1}{5}$

$y = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10}$

$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}$

$\frac{24}{5} + \frac{9}{5} + \frac{42}{5} = \frac{75}{5} = 15$ Gr.

vorzüglich zu quadratischen Gleichungen etc.

7te Aufgabe

vid. Kästner A I S. 245.

Es sollen 2 Zahlen von der Beschaffenheit gefunden werden, daß die Summe ihrer Quadrate wieder ein Quadrat wird. also:

$x^2+y^2=z^2$

und da die Summe zweier Potenzen sich nicht, wohl aber die Differenz in Factoren zu zerstellen läßt wird man so verfahren:

$$z^2-x^2=y^2$$
$$y^2=(z+x)(z-x)$$

Könnte man nun die Summe und Differenz der Größen einzeln bestimmen, so wird man hieraus auch leicht die Größen zu finden können. Da nun aber das Product von Summe und Differenz ein Quadrat werden soll, und man keine weitere Bestimmungen hat, so wird man für den einzelnen Factor irgend eine Supposition annehmen dürfen, wenn sie nur in der Folge nur im Stande ist die Größen zu deutlich(?) bestimmen(?); so setze also

$$z+x=ny \text{. so ist}$$
$$ny(z-x)=y^2$$
$$z-x=\frac{y}{n}.$$

da nun alle hier vorkommende Größen ganze Zahlen sind,

so ist nothwendig die Differenz auch eine gerade Zahl seyn [illegible]
y ist n theilbar. Setzen wir daher $\frac{y}{n} = m$; $y = mn$.

So ist:

$$z + x = n.mn = mn^2$$

$$z - x = m.$$

Jetzt hat man Summe und Differenz besonders ausgedrückt, und es ist:

$$z = \frac{(x+z)+(z-x)}{2} = \frac{mn^2+m}{2} = \frac{m(n^2+1)}{2}$$

$$x = \frac{(x+z)-(z-x)}{2} = \frac{mn^2-m}{2} = \frac{m(n^2-1)}{2}$$

Es sind nun die Größen [xyz] von m und n abhängig ausgedrückt, und die einzige Bedingung nur ist hier [noch] festzusetzen, daß die Ausdrücke durch 2 theilbar seyn müssen. Nimmt man nun für m eine gerade Zahl an, so ist dies immer der Fall. Ist m ungerade so muß n auch ungerade seyn, denn wird [n^2] ist ± 1 wieder gerade, u. also 2 theilbar.

Setzt man daher $m = 1$.

	n = 3.	5.	7.	9.	11.	13.
so ist	y = 3.	5.	7.	9.	11.	13.
	x = 4.	12.	24.	46.	60	84.
	z = 5.	13.	25.	41	61.	85. ....

Setzt man dagegen $m = 2$ so wird:

n = 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
y = 2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.
x = 0,	3.	8.	15	24	35	48	63
z = 2.	5.	10	17	26	37	50	65 ..

~~Dieser~~ Dergleichen correspondirende Zahlen pflegt man auch wohl die Pythagoräischen Zahlen darnach zu nennen, und den ersten Fall $m = 1$ schreibt man dem Pythagoras, den andern aber $m = 2$ dem Plato als Erfindung zu.

Das Beyspiel wird die Behandlung unbestimmter Aufgaben welche sich zu höhern Gleichungen entwickeln etwas verdeutlichen.

Die merkwürdigsten d. Proportionen. (aus Tönk).

§ 274. Lehrsatz

$a : b = c : d$; $= an : bn = c : d$; $= an : b = cn : d$; $= an : bn = cn : dn$;

§ 276. Lehrsatz

$a : ae = b : be$; $= a^n : a^n e^n = b^n : b^n e^n$; $= \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ae} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{be}$;

§ 277. Lehrsatz

I. $a : ae = d : de$; $(a \pm ae) : (d \pm de) = a : d$ oder wie $ae : de$ ihre homologen Glieder.

d.h. die Summe od. Diff. des 1ten Verhältnisses, zur Summe d. Diff. d. 2ten V. = wie 2 homologe Glieder.

II. $a : ae = f : fe$, $(a \pm f) : (ae \pm fe) = a : f$ oder $f : fe$.

d.h. die Summe od. Diff. d. homologen vordern Glieder, zur Summe od. Diff. d. homologen hintern Glieder, wie die Glieder eines Verhältnisses zu einander.

§ 279. Lehrsatz

Eine gegebene Zahl N nach den Verhältnissen der Zahlen $a : b : c : d : f$ zu theilen.

$(a+b+c+d+f) : \overbrace{(x+y+z+p+q)}^{N} = a : x = b : y = c : z = d : p = f : q$.

§ 278. Zusatz

$a : b = c : d = n : m = p : q \ldots$

$(a+c+n+p) : (b+d+m : q) = a : b = c : d = n : m = p : q \ldots$

§ 280. Lehrsatz

$$\begin{array}{l} a : b = m : n \\ c : d = f : g \\ k : h = q : p. \\ \hline ack : bdh = mfq : ngp \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{l} a : ax = n : nx. \\ b : by = m : my \\ c : cz = o : oz \\ \hline abc : abcxyz = nmo : nmo.xyz. \end{array}$$

Zusatz. Wenn

$$\begin{array}{l} a : b = n : m \\ b : f = p : q. \\ \hline a : f = np : mq \end{array}$$

so kann man sagen $a : f$ [illegible] und das Verhältniß $n : m$ u. $p : q$ zusammengesetzt ist $a : f = (n : m) + (p : q)$

ist $n : m = p : q$ so ist $a : f = (n : m) + (n : m) = n^2 : m^2 = (n : m)2$.

3) Wenn $a : b = (n : m) p$ d.h. $a : b = n^p : m^p$, oder $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} = n : m$. d.h. $n : m = \frac{1}{p}(a : b)$

4. In stetigen Proport. $a : b = b : d$ ist $a^2 : b^2 = a : d$, oder $a : d = (a : b) 2$

234.

§ 283 Lehrsatz

$a:b = c:n$ d. h. wenn man bey 2 Proportionen die Glieder d. einen durch d. gleichnamigen Glieder d. andern dividiert

$f:g = h:d.$

$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{n}{d}$

§ 284. Lehrsatz

Bey stetiger Proport. ist die 3te Potenz d. mittl. Gliedes = dem Produkte aus allen 3 Gliedern:

$a:b = b:c$ so ist $b^3 = abc$. denn

$a : ax = ax : ax^2$ so ist $a . ax . ax^2 = a^3x^3 = (ax)^3$.

$8:4 = 4:2 = 4^3 = 64 = 8.4.2$

bo $4.4 = 8.2$

zatem $4.4.4 = 8.2.4$.

Zadanie Dyoef:

X wołów, y krów, z cieląt kupię za 100 Dukt. uważając że jest 100 sztuk bydła i cielę płacę po $\frac{1}{2}$, krowę po 5# woła po 10#

$10x + 5y + \frac{z}{2} = 100$

$x + y + z = 100$

| $x = 10 - \frac{y}{2} - \frac{z}{20} = 100 - y - z$

$x = 100 - y - z$ $200 - 10y - z = 2000 - 20y - 20z$

$10y + 19z = 1800$

kładę na $x = 1$. $10 + 5y + \frac{z}{2} = 100$

$z = 90$ $1 + y + z = 100$

$y = 9.$ $y = 99 - z$

$x = 2$

$10 + 5.99 - 5z + \frac{z}{2} = 100$

$-90 + 5.99 = \frac{9z}{2}$

$-2.10 + 10.11 = 9.10 = z$

$20 + 5y + \frac{z}{2} = 100$: $y = 16 - \frac{z}{10}$

$2 + y + z = 100$

$2 + 16 - \frac{z}{10} + z = 100$

$20 + 16 - z + 10z = 1000$

$9z = \frac{964}{9}$ $107\frac{1}{3}$

~~$36 - z = 1000$~~

~~$+z = -964$~~

x
y
$100-x-y$

$\frac{x}{2}+5y+1000-10x-10y=100$

$\frac{19x}{2}+5y=900$

$x=\frac{(900-5y)2}{19}=\frac{1800-10y}{19}=\frac{1800-1800+190C}{19}$

$y=\frac{1800-19A}{10}=180-A-\frac{9A}{10}=180-10C-\frac{90C}{10}$

$A=\frac{-10B}{9}=-B-\frac{B}{9}=9C+C$

$B=-9C$

$A=10C$

$y=180-19C$

$x=10C$

$C=1$ ist y zu groß			
$=2$ [illegible]			
$=3$ [illegible]			
$=4$			
$=5$ ist $y=85$	$x=50$	z zu groß	
$=6$	$=66$	$=60$	z zu groß
$=7$	$=47$	$=70$	z do
$=8$	$=28$	$=80$	z do
$=9$	$=9$	90	$z=1$

$=10$ würde $y=-$ und eben so für die folg: Wegen die >9 sind daher die Aufgaben nur 1 Auflösung hat.

